Traducción del portugués al español del texto de Sergio Nobre, "Equações algébricas: uma abordagem histórica sobre o processo de resolução da equação de 2 ° grau" en Celestino Silva, C. (org.) Estudos de história e filosofía das ciencias, San Pablo, Editora Livraria da Fisica, 2006, pp. 354-381.

Traducido por Agustina Bayés y María de las Mercedes Trípoli en el marco del Trabajo final del Seminario Historia de la Ciencia, correspondiente a la Maestría en Educación de las Ciencias Exactas y Naturales de la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación de la Universidad Nacional de La Plata.

XVIII

ECUACIONES ALGEBRAICAS: UN ABORDAJE HISTÓRICO SOBRE EL PROCESO DE RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE 2º GRADO

Sergio Nobre

Introducción

Por alguna razón desconocida, algunos autores brasileños de libros escolares de matemática comenzaron, a partir de los años 60 del siglo XX[1], a llamar a la fórmula de resolución de ecuaciones de 2º grado, del tipo $ax^2 + bx + c = 0$, como *Fórmula de Bhāskara.* Esta fórmula, así conocida por profesores y alumnos brasileños, no se llama así en otros países. El nombre Bhāskara está relacionado a la resolución de una ecuación similar a esta, pero que posee la variable y también elevada al cuadrado, es decir, $ax^2 + b = y^2$. Esta segunda ecuación recibe el nombre de *Ecuación de Pell*, pero, según estudios históricos actuales, existe un gran error al atribuir el descubrimiento de su resolución al matemático inglés John Pell (1611-1685). Algún tiempo después de que se le atribuyera a Pell el descubrimiento de la fórmula de resolución de esta ecuación, se aseguró de que hubo un error, ya que él había simplemente traducido los resultados obtenidos por el suizo Johann Heinrich Rahn (1622-1676). Más recientemente, con la profundización de los estudios históricos sobre matemáticas en la India y en el mundo árabe, se llegó al descubrimiento histórico que el matemático hindú conocido como Bhāskara II (1114-1191?) había llegado a la resolución de esta ecuación, pero que, sin embargo, no había demostrado sus resultados[2]. Con relación a las ecuaciones de 2º grado del tipo $ax^2 + bx + c = 0$, el trabajo de Bhāskara II no fue más allá de lo que había sido descubierto por sus predecesores. Esto me llevó a escribir , en orden cronológico, algunos hechos sobre el desarrollo histórico de la resolución de la ecuación de 2º grado.

Primeros indicios sobre el surgimiento de ecuaciones de 2º grado

Los primeros indicios históricos sobre problemas involucrando ecuaciones de 2º grado se encuentran en documentos antiguos dejados por los pueblos de Egipto, Babilonia, China, Grecia,

---

[1] Ver en Carvalho, Fernanda et al 2001.

[2] Información detallada obtenida en Datta, Bibhutibhusan, 1928, Selenius, Clas-Olof 1963 e Scriba Christoph 1974 en la bibliografía

entre otros, que datan de antes de la era cristiana. A continuación, presentaré algunos de estos problemas, cuyas formas de resolución realizadas por esos pueblos se discutirá en la próxima sección.

Egipto

Entre los documentos matemáticos egipcios que sobrevivieron hasta nuestros días, se destacan 5 papiros que fueron escritos en el siglo XVII a.C. Los más famosos son los papiros de Rhind y de Moscú. En el primero no existe nada sobre ecuaciones de 2º grado, sin embargo, en el Papiro de Moscú se encuentran ejercicios que incluyen ecuaciones del tipo $ax^2 = b$, como en el ejemplo

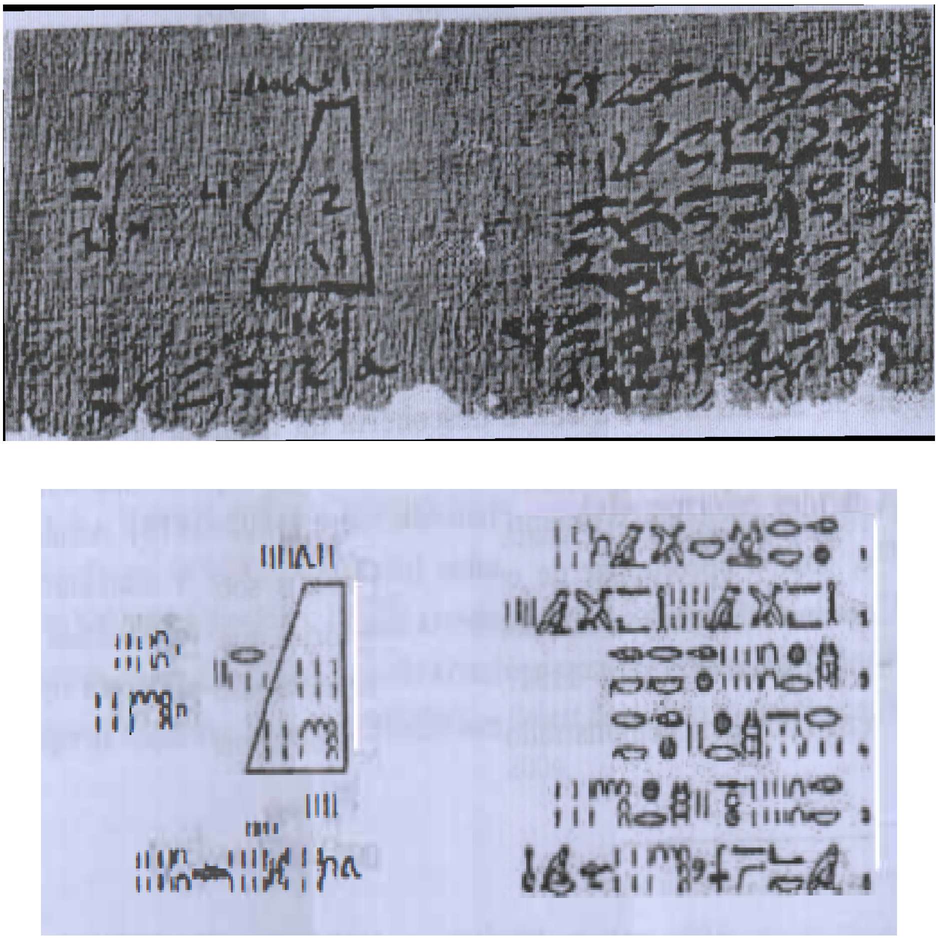


Figura 1

siguiente (el lenguaje presentado en este y en los ejemplos que siguen son una adaptación a nuestro idioma):

Papiro de Moscú - Ejercicio 6: *Un rectángulo tiene un área de 12. Su ancho es 1/2 de la longitud + 1/4 de la longitud. Determina los lados del rectángulo.*

Babilonia

Los pueblos babilonios dejaron en sus tablillas de escritura cuneiforme varios ejemplos en los que dominaban el uso de ecuaciones, incluyendo el uso de sistemas de ecuaciones con dos o más incógnitas. A pesar de no usar fórmulas, los babilonios también tenían un método propio de resolver ecuaciones de 2º grado. En la tablilla babilónica que se encuentra en el museo británico (British Museum), en Londres, bajo la sigla BM 13901, aparecen 24 problemas matemáticos con sus resoluciones y algunos de estos problemas están relacionados a ecuaciones cuadráticas. Esas tablillas datan de entre los años 2000 y 1600 a.C.

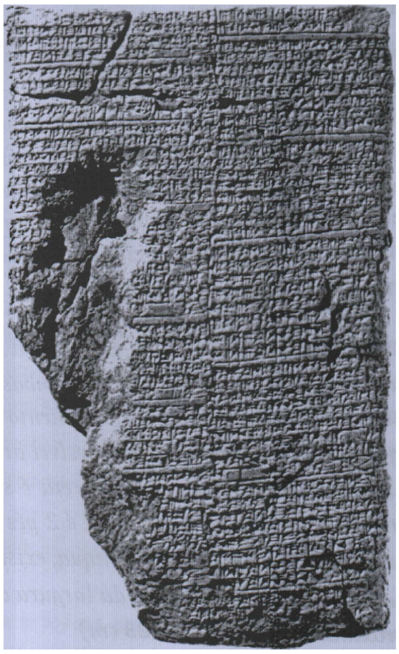


Figura 2

(Problema 1, BM 13901) *Agregué el área y el lado de un cuadrado y el resultado es 3/4.* (naturalmente el área y el lado de un cuadrado no se pueden sumar ya que tienen unidades diferentes, quiere decir que en este y los siguientes problemas se han agregado los respectivos valores numéricos)

(Problema 2, BM 13901) *Sustraje el lado de un cuadrado de su área y el resultado es 870.*

(Problema 5, BM 13901) *Agregué el área, el lado y 1/3 del lado de un cuadrado y obtuve 55/60.*

(Problema 6, BM 13901) *Agregué el área dos veces a la tercera parte de un cuadrado y obtuve 35/60.*

(Problema 7, BM 13901) *Agregué 11 áreas con 7 lados de un cuadrado y obtuve 6 1/4.*

(Problema 16, BM 13901) *Del área de un cuadrado resté un tercio de su lado y el resultado es 1/12.*

China

Uno de los textos matemáticos más antiguos de China es el *Chiu Chang Suan Shu,* es decir *Nueve capítulos sobre el arte matemático*. Sobre el origen de este texto poco se sabe; no se sabe quién lo escribió ni el momento exacto en que apareció. Se supone que fue antes del siglo II antes de la era cristiana. Se sabe que este texto tuvo varias ediciones y que fue reelaborado en el año 263 por el importante matemático y astrónomo chino Liu-Hui (siglo III). En 1084 el texto fue impreso. Algunos ejercicios que involucran la ecuación de 2º grado presentes en Chiu Chang Suan Shu son los siguientes:

(Problema 12 del libro IX) *Ahora hay una puerta, de la cual se desconocen la altura y el ancho. Se sabe que ambas medidas (alto y ancho) son menores que una caña de bambú de longitud también desconocida. Si la vara de bambú se sostiene horizontalmente no es posible cruzar la puerta ya que la varilla es 4 pies más larga que el ancho de la puerta. Si la barra se sostiene verticalmente, tampoco es posible atravesar la puerta ya que la varilla es 2 pies más larga que la altura de la puerta. Sin embargo, si la varilla se sostiene de manera oblicua, solo hay una forma de atravesar la puerta. ¿Cuánto miden la altura y el ancho de la puerta y cuánto mide la varilla? (Un pie es aproximadamente igual a 23 cm)*

(Problema 20 del libro IX) *Ahora hay una ciudad de forma cuadrada, rodeada por una muralla, donde se desconocen las longitudes de sus lados. En el medio de cada lado hay un portón abierto. Salga por el portón norte, en dirección norte y camine 20 pasos hasta encontrar un árbol. Salga por el portón sur, en dirección sur y camine 14 pasos, luego dé la vuelta en dirección oeste y camine otros 1775 pasos. Desde este punto se puede ver el árbol.*
Pregunta: ¿Cuánto mide el lado de la ciudad? (1 paso = 6 pies = 1,33 m)

Grecia

En Grecia encontramos una gran cantidad de ejemplos de problemas matemáticos cuyo enfoque recae en ecuaciones de 2º grados. Desde los estudios matemáticos llevados a cabo por los primeros matemáticos griegos conocidos, Thales de Mileto (~625-547 aC) y Pitágoras (~570-497 aC), pasando por Euclides (~365—300 aC) y su magnífica obra *Elementos*, y culminando con Diofanto (~250 dC), los griegos llevaron a cabo estudios de gran importancia en el desarrollo de la historia de la resolución de la ecuación de 2º grado. Pitágoras y sus seguidores, los pitagóricos, que descubrieron los números inconmensurables tuvieron dificultades, por ejemplo, al trabajar con ecuaciones del tipo $x^2 = 2$ en forma numérica. Sin embargo, los griegos no encontraron barreras en construir figuras geométricas que, de forma exacta, resolvían dicha ecuación. Para ello, simplemente construían un cuadrado de área 2. En las obras *Elementos y Data*, de Euclides, se encontraron demostraciones de que todas las ecuaciones cuadráticas que tienen resultados positivos se pueden resolver mediante la construcción de formas geométricas. Algunos problemas y sus resoluciones geométricas dados por los griegos se verán en el próximo capítulo.

Procesos para resolver la ecuación de 2º grado

Babilonia

Los procesos de resolución de problemas que involucran ecuaciones de 2º grados se diferencian entre los distintos pueblos. Los babilonios, por ejemplo, tenían un método especial. Sin símbolos ni fórmulas, y en forma de disertación, los babilonios utilizaban métodos que se asemejaban al proceso algebraico actual. Uno de los problemas presentes en la tablilla matemática BM 13901, presentada en la sección anterior, fue resuelta por los babilonios de la siguiente manera:

(Babilonia: Problema 1, BM 13901): *Agregué el área y el lado de un cuadrado y el resultado es 3/4.*

A continuación, presentaremos a la izquierda cómo resolvieron los babilonios el problema y a la derecha la forma algebraica moderna

Agregué el área y el lado de un cuadrado y el resultado es 3/4	$x^2 + x = 3/4$
Tome el coeficiente = 1	$B = 1$
Divida el coeficiente por la mitad, el resultado es 1/2	$B/2 = 1/2$
Multiplique 1/2 por 1/2 y el resultado es ¼	$(B/2)^2 = 1/4$
A 1/4 agregue 3/4 y el resultado es 1	$(B/2)^2 + C = 1/4 + 3/4 = 1$
La raíz cuadrada de 1 es 1	$\sqrt{(B/2)^2 + C} = 1$
1/2 que se ha multiplicado, debe restarse de 1 y el resultado es 1/2	$\sqrt{(B/2)^2 + C} - B/2 = 1/2$
1/2 es el valor del lado del cuadrado, que viene dado por fórmula:	$X = x = \sqrt{(B/2)^2 + C} - B/2$

Si realizamos una comparación con la resolución de esta ecuación en su forma normal, $x^2 + x - 3/4 = 0$, siendo $a = 1,\ b = 1 = B\ y\ c = -3/4 = -C$, tendremos:

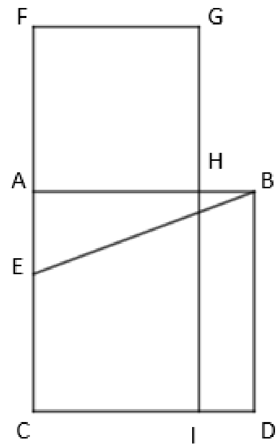
Fórmula para resolver una ecuación de 2º grado del tipo $ax^2 + bx + c = 0$.

$x = (-b \pm \sqrt{b - 4ac})/2a$ (solamente usaremos el resultado positivo)

$$x = \frac{-B+\sqrt{B^2+4.1.C}}{2.1} \Rightarrow x = \frac{1}{2}\left(-B + 2\sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 + C}\right) = \sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 + C} - \frac{B}{2},$$

que es el resultado obtenido por los babilonios.

Esta comparación nos proporciona elementos cuyos procesos, considerando la no utilización de números negativos y la no utilización de los métodos simbólicos actuales, son equivalentes al que se utilizan actualmente. Esto nos califica para decir que los métodos para resolver ecuaciones de 2º grado ya eran conocidos por los babilonios unos 20 siglos antes de la era cristiana.



Grecia

Los griegos, a diferencia de los pueblos de Babilonia, resolvían en forma geométrica muchos problemas que pueden considerarse relacionados con ecuaciones 2do grado. En varias ocasiones en sus obras *Elementos y Data*, Euclides de Alejandría (~300 aC) nos muestra cómo resolver geométricamente problemas de este tipo. En *Elementos*, la mayoría de los ejemplos referentes a eso se encuentran en el libro II, como se puede ver en la proposición 11 que se presenta a continuación:

Euclides - Elementos, Libro II, Proposición 11 - *Cortar la recta dada de modo que el rectángulo contenido por el número entero y por uno de los segmentos sea igual al cuadrado del segmento restante*[3] (cortar un segmento AB dado en un punto H, de tal de modo que el área del cuadrado formado por el segmento AH sea igual al área del rectángulo de lados HB y AB).

Utilizando una transcripción de la traducción del texto original hecho para el idioma portugués, y describiendo en lenguaje algebraico actual, la resolución de este problema dada por Euclides es la siguiente:

sea la medida del segmento de recta AB = a = medida del segmento de recta BD,

sea x la medida que se desea calcular,

entonces la medida del segmento de recta AH = x y la medida del segmento HB = (a - x)

por lo tanto, el segmento de línea AB se dividió de manera que: $x^2 = a(a - x)$

es decir, en esta proposición 11 del Libro II de los *Elementos*, Euclides muestra la resolución geométrica de la ecuación de segundo grado de tipo $x^2 + ax = A$.

Aproximadamente 500 años después de Euclides, surge en Grecia el principal trabajo centrado en cuestiones que se conocen hoy como relacionadas con *la resolución de ecuaciones algebraicas*.

[3] Utilizaremos la traducción al portugués hecha por Irineu Bicudo quien amablemente nos la facilitó.

Diofanto de Alejandría (~250 a.C.) dio un importante paso significativo para el pasaje del *álgebra geométrica*[4] al *álgebra simbólica.* Su obra *Aritmética*, como informa Diofanto en la introducción del texto, estaría compuesta por 13 libros. De estos, solamente 6 han llegado a nuestros días en su versión griega original. La traducción al árabe de otros 4 libros se encontró recientemente, pero se supone que estos no se han traducido de la versión original escrita por Diofanto, sino de una versión comentada por Hipatia (~375-415) alrededor del año 400. En estos 10 libros que se conocen, no hay teoría sobre la resolución de ecuaciones, pero Diofanto anuncia en la introducción de la obra que se mostraría allí cómo resolver algunas ecuaciones específicas de segundo grado y ecuaciones que involucran potencias de nivel superior, como también ecuaciones donde se utilizan potencias en diferentes variables, como, por ejemplo, $x^2 + y^2 = a^2$, $x^3 + y^3 = a^3$, etc.[5] Las ecuaciones de segundo grado trabajadas por Diofanto y sus respectivas formas de resolución, escritas en la forma actual, fueron:

$$ax^2 + bx = c \implies ax = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + ac} - \frac{b}{2}$$

$$ax^2 + c = bx \implies ax = \frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}$$

$$ax^2 = bx + c \implies ax = \frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + ac}$$

Como no se conocían los números negativos, se trabajaron las ecuaciones en la forma en que están arriba. Sin embargo, por ejemplo, si observamos la primera de las tres ecuaciones y la adaptamos a nuestro conocimiento actual, podemos trabajarla de la siguiente manera:

$$ax^2 + bx - c = 0; \text{ donde el valor de } c \text{ se vuelve negativo}$$

su resolución vendrá dada por: $x = (-\,b \pm \sqrt{b^2 + 4ac})/2a$ como conocemos actualmente al desarrollar la solución dada por Diofanto para la ecuación, tenemos:

$$ax = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + ac} - \frac{b}{2} = \sqrt{\frac{b^2}{4} + ac} - \frac{b}{2} = \sqrt{\frac{b^2+4ac}{4}} - \frac{b}{2}$$

$$ax = \sqrt{\frac{b^2+4ac}{4}} - \frac{b}{2} = \frac{-b+\sqrt{b^2+4ac}}{2}$$

---

[4] La denominación *álgebra geométrica* fue introducida por el historiador dinamarqués H. Zeuten. Ver en Bekken 1994, 39.

[5] A partir de estudios relativos a este tema en el texto de Diofanto, Pierre de Fermat (1601-1665) escribió aquello que lo hizo famoso como "el último teorema de Fermat". De una versión latina del libro *Aritmética* de Diofanto, Fermat, al analizar estos estudios referentes a las ecuaciones del tipo $x^3+y^3=a^3$, conjeturó sobre la imposibilidad de su solución y además sobre la imposibilidad de solución de cualquier problema del tipo $x^n+y^n=a^n$, para n natural mayor que 2. Ver, por ejemplo, en Tropfke, 1933-34, 44, 43 y Katz 1993, 164-173.

$x = \frac{-b+\sqrt{b^2+4ac}}{2a}$, que es similar al resultado de arriba.

India y mundo árabe

La historia de las matemáticas que se cuenta tradicionalmente sigue, en sentido amplio y en general, un camino que tiene sus orígenes en los pueblos egipcio y babilónico y adquirió fundamento teórico con los pueblos griegos y finalmente fue difundida en el mundo europeo principalmente a través de los pueblos árabes. Si esa historia se contara con mayor detalle, entonces las influencias que esos pueblos sufrieron de otros pueblos comienzan a emerger y el camino tradicional adquiere nuevas vertientes que necesariamente avanzan en el mundo oriental. Aparecen las influencias venidas de pueblos milenarios, como los chinos y los hindúes, por ejemplo. Con respecto al tema del descubrimiento de la resolución de ecuaciones algebraicas, el pueblo hindú tuvo un papel primordial. La introducción de números negativos como coeficientes de una ecuación de 2º grado y el uso del *cero* como elemento del cálculo, realizado por ellos fue decisivo para encontrar su solución general. Entre los matemáticos hindúes que trabajaron en esa área, se destaca Ãryabhata (~476-?), matemático y astrónomo, quien escribió en el año 499 un texto llamado *Ârgabhatiya*, un tratado sobre matemáticas y astronomía, en 4 partes, escritas en verso (alrededor de 120 versos). En la segunda parte de este texto, aparecen 33 versos que tratan específicamente sobre problemas matemáticos, donde se presentan algunos resultados importantes para la matemática, como el valor del seno de ángulos de 0 a 90 grados y el uso de valor 3,1416 como el valor de π.[6] Entre los problemas matemáticos propuestos por Ãryabhata, algunos son relativos a ecuaciones de 2º grado. El autor también estudió ecuaciones de grados superiores y ecuaciones que involucran dos variables. En su obra matemática, a pesar de que muestra conocimiento de resolución de problemas que implican ecuaciones cuadráticas, Ãryabhata no proporcionó fórmulas para la solución de tales problemas.

Un estudio en el campo de la resolución de ecuaciones algebraicas, más completo que el realizado por Ãryabhata, fue hecho por el también astrónomo y matemático hindú Brahmagupta (~ 598-665?). En su obra principal, *Brãhma-sphuta siddhãnca*[7] (628) que es una especie de descripción y aplicación de varios problemas de astronomía, Brahmagupta da un paso importante hacia la comprensión del proceso de resolución de ecuaciones de 2º grado e incluso de grados superiores, ya que surge como el primer autor en usar el *cero* como elemento del cálculo y también en utilizar números negativo. Dando un avance significativo al desarrollo del pensamiento en

[6] No existe información sobre cómo Áryabhata llegó a este resultado. Ver en Katz 1993, p.203

[7] "Perfección de las enseñanzas de Brahma". Brahma: uno de los grandes dioses del hinduismo antiguo período Védico.

relación con los campos numéricos, asumió al *cero* como elemento de separación entre los números positivos y los números negativos. En el campo específico de resolución de ecuaciones cuadráticas, Brahmagupta desarrolló estudios para la solución general de ecuaciones del tipo $ax^2 + bx = d$, escritas en la forma actual. Una solución dada por él para esta ecuación fue:

> *"a la suma multiplicada por el coeficiente del cuadrado, se suma el cuadrado de la mitad del coeficiente de la incógnita. Luego toma la raíz cuadrada. La mitad del coeficiente de la incógnita es restada, y finalmente se divide por el coeficiente del cuadrado. – Ahora se tiene la incógnita. "*
>
> (Extraído de Bekken 1994, p. 49)

Desarrollando los procedimientos indicados por Brahmagupta paso a paso tenemos:

- la ecuación dada es: $ax^2 + bx = d$.
- a la suma multiplicada por el coeficiente al cuadrado, se suma el cuadrado de la mitad del coeficiente de la incógnita.

$$ad + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

- luego se saca la raíz cuadrada

$$\sqrt{ad + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

- se resta la mitad del coeficiente desconocido

$$\sqrt{ad + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{b}{2}$$

- y finalmente se divide por el coeficiente del cuadrado

$$\frac{\sqrt{ad+\left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{b}{2}}{a}$$

- Desarrollando la ecuación encontrada arriba tenemos:

$$x = \frac{\sqrt{4ad+b^2} - b}{2a}$$

Brahmagupta avanzó en sus estudios en relación con la resolución de ecuaciones algebraicas y obtuvo resultados importantes trabajando con ecuaciones como: $ax^2 + b = y^2$, conocidas hoy como *ecuación de Pell*.[8]

---

[8] Mayor información sobre este tema se puede encontrar en Bhāskara & Brahmagupta 1817, Katz, 1993, pp. 208-211, Selenius 1963, Datta 1928

Después de Brahmagupta, un alumno suyo con el nombre de Bhāskara (siglo VI), que pasó a ser conocido en la historia de las matemáticas como Bhāskara I, realizó estudios sobre la obra de Ãryabhata. Sus comentarios sobre el trabajo *Ãryabhatiya* van a ser importantes no solamente para la divulgación de los resultados contenidos en el mismo, sino también para una mejor comprensión, ya que Bhāskara reescribió descriptivamente los versos contenidos en dicha obra. Acerca de Bhāskara I se conoce muy poco, porque los historiadores modernos descubrieron solamente a principios del siglo XIX que hubo dos personajes con nombre Bhāskara en la historia de las matemáticas hindúes.[9]

Figura 3

Con la creación de un estado árabe independiente en el año 622 de la Era Cristiana, el desarrollo de la ciencia árabe gana impulso. A partir de la difusión del conocimiento matemático hindú en el mundo árabe, es notoria la presencia de estudios realizados inicialmente en la India que son desarrollados por matemáticos árabes. Quizás el principal hallazgo de esto sea el Sistema de numeración hindú-árabe que pasó a ser adoptado por los pueblos occidentales. La figura principal del mundo árabe que tuvo estrechos vínculos con los pueblos hindúes, fue indudablemente, Muhammad ibn-MusaAl-Khwārizmi (ca.780-850), de la región de Corasmia, cerca de la antigua frontera del antiguo territorio árabe con la India. Al-Khwārizmi[10], quien fue miembro de la "casa de sabiduría" en Bagdad, realizó estudios de álgebra, geografía, aritmética y astronomía y figura como introductor de los métodos hindúes en el mundo islámico. Una obra de Al-Khwātizmi donde queda marcada su conexión con los pueblos hindúes es *Kitãb al-jam wal tafrig bi hisãb al Hind (Libro sobre sumas y restas de acuerdo con los hindúes*)[11], donde se introdujo en el mundo árabe el método aritmético desarrollado por esos pueblos y principalmente, la introducción del sistema decimal de posición. Otra obra importante de Al-Khwārizmi fue *Al-kitab al muhtasar fi hisãb al-jabr wa-l-muqãbala*, cuya traducción al portugués es aproximadamente *Libro condensado de cálculos a partir de la transposición de un término a otro (al-jabr) y comparación (al-muqãbala) de un término con otro.* En este texto, son presentados algunos procesos de resolución de ecuaciones lineales y cuadráticas y, para eso, Al-Khwārizmi las clasifica de las siguientes 6 formas:

---

[9] Ver en Datta 1930.
[10] La figura de al lado y las otras que siguen fueron extraídas de: http://www.mes.st-and.ac.uk/history.
[11] Este libro fue el primero de aritmética árabe traducido al latín y algunas de estas traducciones son los únicos documentos sobre la existencia del texto en árabe, porque el original no fue encontrado.

1. cuadrados iguales a raíces $ax^2 = bx$
2. cuadrados iguales a números $ax^2 = c$
3. raíces iguales a números $ab = c$
4. cuadrados más raíces iguales a números $ax^2 + bx = c$
5. cuadrados más números iguales a raíces $ax^2 + c = bx$
6. raíces más números iguales a cuadrados $bx + c = ax^2$

En su trabajo con las ecuaciones anteriores, Al-Khwārizmi no manipulaba los números negativos, por eso, la ecuación cuadrática en forma general $ax^2 + bx + c = 0$ no tenía sentido para él.

Para los primeros tres tipos de ecuaciones, Al-Khwārizmi dio soluciones directas con la excepción de que el cero no era considerado como una solución a las ecuaciones del primer tipo. Sus reglas para la resolución de los otros tipos de ecuaciones son más interesantes y están directamente vinculadas a nuestros intereses. En ese sentido, presentaremos uno de los procesos de resolución adoptados por él.

Al-Khwārizmi no usó símbolos para trabajar contra estas ecuaciones, sus estudios sobre la resolución de ecuaciones del 4º, 5º y 6º tipo fueron realizados a partir de las siguientes ecuaciones adoptadas por él como ejemplos: $x^2 + 10x = 39$, $x^2 + 21 = 10x$ y $3x + 4 = x^2$, respectivamente. Estas tres ecuaciones pasaron a servir como ejemplos clásicos en el campo de la resolución de ecuaciones cuadráticas en el mundo árabe, siendo utilizadas por otros matemáticos árabes posteriores a Al-Khwārizmi, y también en otras regiones. En todos los casos, después de exponer la resolución algebraica, Al-Khwārizmi presentó una demostración geométrica, como forma de justificar geométricamente la exactitud de las reglas presentadas a través de los números.[12]

Como Al-Khwārizmi no usó símbolos, fue utilizada una forma descriptiva de presentar los problemas y sus soluciones. Los tres ejemplos utilizados fueron[13]:

(Ecuación del 4º tipo: $ax^2 + bx = c$**)** *Un cuadrado más diez raíces del mismo es igual a treinta y nueve. ¿Cuál es el cuadrado?*

Escribiendo en la forma algebraica actual, el problema es: $x^2 + 10x = 39$

La solución dada por Al-Khwārizmi fue:

[12] Ver en Bekken 1994, p. 61.
[13] Estos ejemplos fueron extraídos de Bekken 1994, pp. 62-63.

"Toma la mitad del número de raíces, obteniendo cinco. Esto es multiplicado por sí mismo - el producto será veinticinco. Suma esto a treinta y nueve - la suma es sesenta y cuatro. Luego saca la raíz cuadrada de esto, que es igual a ocho, y resta de esto la mitad del número de raíces, que es cinco. La diferencia es tres. Esta es la raíz del cuadrado buscado y su cuadrado es nueve."

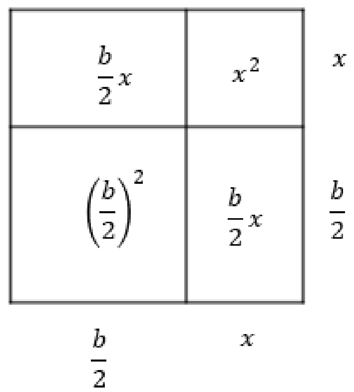
Escribiendo en la forma algebraica actual, la solución a este problema es:

$$x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}$$

Haciendo los cálculos:

$$x = \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 + 39} - \frac{10}{2} \Rightarrow x = 3$$

La justificación geométrica dada por Al-Khwārizmi procede exactamente como fue presentado en el Libro II, 4 de los *Elementos* de Euclides. Sin embargo, esto no es mencionado por el autor árabe.[14]



considerando la ecuación $x^2 + 10x = 39$ dada por Al-Khwārizmi, entonces $b = 10$

$x^2 + 10x \Rightarrow$ área de los dos rectángulos + área del cuadrado menor

como $x^2 + 10x = 39$, y el área del cuadrado mayor es $(b/2)^2 = (10/2)^2 = 25$

entonces el área de la figura es $39 + 25 = 64$

es decir, los lados $b/2 + x = 8 \Rightarrow 5 + x = 8$

por lo tanto $x = 3$, que es el resultado dado por la fórmula anterior.

[14] Ver en Tropkke 1993-33, 44, 96.

(Ecuación del 5º tipo: $ax^2 + c = bx$**)** *Un cuadrado más 21 unidades es igual a 10 raíces. ¿Cuál es el cuadrado?* Escribiendo en la forma algebraica actual, el problema es: $x^2 + 21 = 10x$

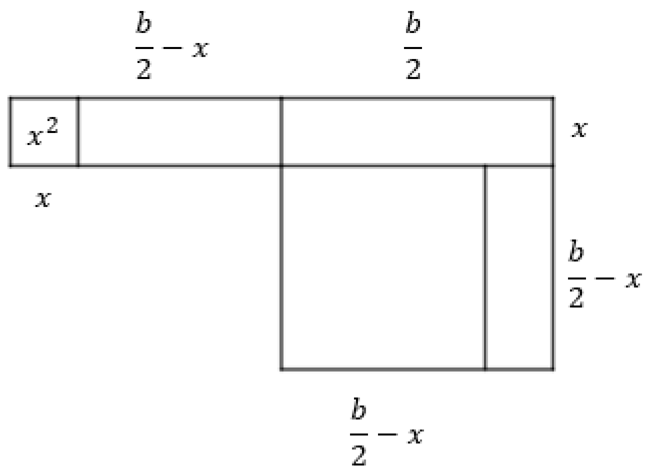
La solución dada por Al-Khwārizmi fue:

"Primero tome la mitad del número de raíces, acá es 5, y que elevado al cuadrado da 25. De 25 reste las 21 unidades. Esto da 4, que tiene a 2 como raíz cuadrada. De la mitad de las raíces, que es 5, reste a esta raíz cuadrada, obteniendo 3 como la raíz, y el cuadrado en sí es 9. Si quisiera, puede agregar la raíz cuadrada (el 5). Entonces tendrá 7 como la raíz y 49 como el propio cuadrado ... este ejemplo proporciona dos raíces, algo que no hemos encontrado antes."

Escribiendo en la forma algebraica actual, la solución a este problema es:

$$x = \frac{b}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c}$$

La justificación geométrica dada por Al-Khwārizmi para este caso también idéntica a la presentada por Euclides en el Libro II, Proposición 5 de los *Elementos*, y la figura utilizada es:



(Ecuación del 6º tipo: $bx + c = ax^2$**)** *Tres raíces más el número 4 es igual al cuadrado. ¿Cuál es el cuadrado?*

Escribiendo en la forma algebraica actual, el problema es: $3x + 4 = x^2$

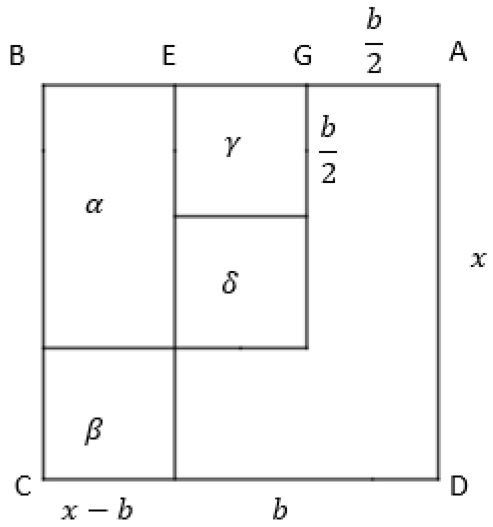
La solución dada por Al-Khwārizmi fue:

"Tome la mitad de las raíces, que es 1 ½ *y eleve al cuadrado, obteniendo 2 ¼. Agregue luego el número 4, dando 6 ¼, con raíz cuadrada* 1 ½. *A esto se le agrega la mitad de las raíces, que es* 1 ½, *que da 4. Entonces el cuadrado es igual a 16. "*

Escribiendo en la forma algebraica actual, la solución a este problema es:

$$x = \frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c}$$

En este caso la justificación geométrica dada por Al-Khwārizmi no aparece directamente en la obra de Euclides, ya que éste no trata exactamente con este tipo de problema. Pero los problemas similares a éste son tratados por Euclides en el ejercicio 84 del libro *Data*, en la proposición 6 del Libro II y en la proposición 29 del Libro VI de los *Elementos*[15].



Para la justificación geométrica de la resolución presentada, Al-Khwārizmi utiliza el cuadrado $ABCD$, de lado x, cuya área es x^2. Este es el valor buscado[16].

Luego toma $AE = b = 3$, y el área del rectángulo en los lados AE y AD tiene área $bx = 3x$.

Entonces el otro rectángulo de lados BC y BE ($\alpha + \beta$) tiene un área $x^2 - 3x$, es decir, esta área es $c = 4$, según la ecuación dada.

Si tomamos la mitad del segmento AE, es decir, AG, tenemos $b/2 = 1\,1/2 \Longrightarrow EG = 1\frac{1}{2}$, de lo cual se concluye que $BG = x - b/2 = x - 1\frac{1}{2}$

Tomemos entonces el cuadrado de los lados BG y BO ($\alpha + \gamma + \delta$), y el cuadrado de lado EG (γ). El rectángulo δ es congruente con el rectángulo β.

Dado que el área del rectángulo de lados EB y BC ($\alpha + \beta$) es igual $c = 4$, entonces el área de la figura formada por el cuadrado γ y el rectángulo α también es igual a $c = 4$.

[15] Ver en Tropkke 1993-33, 44, pp. 97-99.

[16] La presentación del problema de abajo no refleja exactamente como fue hecho por Al-Khwārizmi. El autor hizo algunas adaptaciones para facilitar la comprensión al lector.

El área del cuadrado del lado BG $(\alpha + \gamma + \delta)$ es igual a $(\alpha + \gamma + \delta) = 4 + (b/2)^2 = 4 + (1\,½)^2$, como $BG = x - 1\,½$, entonces $(x - 1\,½)^2 = 4 + (1\,½)^2$

En conclusión:

$$x = 1\frac{1}{2} + \sqrt{4 + \left(1\frac{1}{2}\right)^2} = 4$$

Los seguidores de Al-Khwārizmi

La continuidad de los estudios realizados por Al-Khwārizmi y la permanencia de sus resultados es destacable entre quienes más tarde abordaron el tema de la *resolución de ecuaciones cuadráticas*. En el mundo árabe, Abu Kāmil Sogā ibn Aslam (~850—930), un matemático egipcio, reelaboró, en su obra *Álgebra*, alrededor de 50 ejercicios propuestos por Al-Khwārizmi, incluidas las famosas ecuaciones $x^2 + 10x = 39$ (4º *caso*), $x^2 + 21 = 10x$ (5º caso) y $3x + 4 = x^2$ (6º *caso*). En algunos ejercicios, se utilizaron las mismas ecuaciones, pero los valores numéricos fueron alterados. En *Álgebra*, Abu Kāmil, propuso otros 60 ejercicios nuevos, y en algunos casos los resultados son números irracionales. Al resolver ecuaciones cuadráticas, él demuestra conocimiento del trabajo realizado por Euclides en sus *Elementos*, e incluso menciona que Al-Khwārizmi desarrolló sus estudios a partir de su conocimiento en relación con esta obra[17]. Para las demostraciones geométricas de los casos 4º y 6º, Abu Kāmil recurre a la proposición 6 del Libro II, y para ambos casos de raíces (positiva y negativa) del 5º caso es utilizada la Proposición 5 del Libro II de los *Elementos* de Euclides.

A finales del siglo X, los textos de Diofanto se dieron a conocer en todo el mundo árabe[18], y esto abre una nueva dimensión en el desarrollo del trabajo con las ecuaciones algebraicas. Importantes trabajos en este sentido fueron realizados por Abu Bekr Muhammed ibn Alhaçan Alkarhi (~1010), quien desarrolló estudios con ecuaciones de hasta 4º grado mediante el uso de formas binomiales y de métodos algebraicos de multiplicación y división de polinomios. Otro seguidor de Al-Khwārizmi era Omar ibn Ibrāhim Alhajjāmi (~1123), quien es más conocido por sus resultados con las ecuaciones cúbicas, pero que también dejó escritos referentes al trabajo con las ecuaciones antes mencionadas de los 4º y 5º caso. En la península ibérica, el matemático judío de Barcelona Abraham bar Chijja ha Nasi (Savasorda) (principios del siglo XII) también hace una pequeña contribución al desarrollo del tema y desarrolla estudios para la resolución de ecuaciones

[17] Ver en Tropfke 1993-34, 44, 100.
[18] Una traducción de la obra de Diofanto al árabe fue hecha por Abu'l Wafa (940-998).

cuadráticas de la forma $x^2 = px + q$ a partir de las enseñanzas contenidas en el Libro II de los *Elementos* de Euclides, que es citado por el autor.

De vuelta a la India

Figura 4

También en el siglo XII, en la India, otro personaje destacado en el mundo científico, que logró importantes resultados con respecto a la resolución de ecuaciones cuadráticas, es conocido en la historia de las matemáticas como Bhāskara II (1114-1191?). Sus estudios, ligados a la astronomía y las matemáticas fueron referentes a los estudios iniciados por sus antecesores, y compatriotas, Ãryabhata y Brahmagupta. En sus obras principales *Lilavati* y *Bijaganita*, Bhāskara II muestra dominio del trabajo con números positivos y negativos, utilización del cero, raíces cuadradas, y también en la búsqueda de reglas generales para resolver ecuaciones lineales y cuadráticas. Su principal resultado en este campo fue haber sido el primero en encontrar una solución general para una ecuación del tipo $ax^2 + b = y^2$, pero este resultado específico suyo no aparece acompañado por una demostración[19].

Europa medieval

Las matemáticas en el feudalismo europeo comienzan a tener impulso a mediados del siglo XII y principios del siglo XIII, con la llegada de la matemática islámica a través de las escuelas de traducción en los territorios de dominio árabe, en la península ibérica. Entre las primeras obras árabes traducidas al latín, se encuentran los textos de Al-Khwārizmi[20]. El personaje más importante en el mundo matemático europeo en este período fue sin duda, Leonardo Fibonacci de Pisa (1170?-1250?), un comerciante italiano que tenía conocimientos de las lenguas árabe y griega y que realizó varios viajes a países árabes.

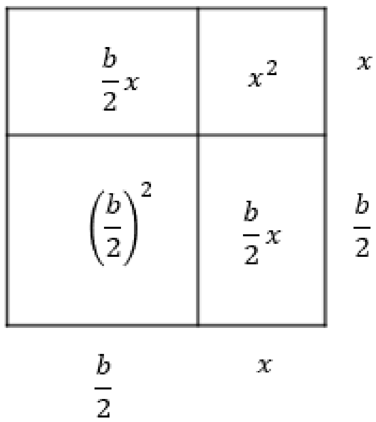
Su obra matemática más famosa fue *Liber abbaci* (1202, 1228), que se conoce como un marco del desarrollo de las matemáticas en la Edad Media. En este texto, Fibonacci introduce en territorio europeo el sistema de numeración hindú-árabe. El proceso de conteo en Europa estaba basado en el sistema de números romanos y los cálculos se hacían con el ábaco. En el campo de la resolución de

---

[19] Esta ecuación es conocida actualmente como *ecuación de Pell,* en homenaje a John Pell (1611-1685) que supuestamente había descubierto el algoritmo de su resolución. Existen sin embargo algunas controversias con respecto a este tema. Información más detallada puede encontrarse en Child 1920, Datta 1928, Scriba 1974 y Selenius 1963.

[20] Adelard of Bath, que actuó como traductor entre 116 y 1142, tradujo al latín *Liber ysagogarum Alchorismi* y Joannes de Sevilla y Domingo Gundisalvo, que trabajaban como traductores entre 1135 y 1153 tradujeron *Liber alghoarismi de practica arismetrice*. Otros traductores de la obra de Al-Khwārizmi fueron Gerardo de Cremona (114-1187) y Robert de Chester (~1145). Katz 1993, 263.

ecuaciones algebraicas, su contribución radica en el capítulo 14 de la obra mencionada.[21] Leonardo usa algunos ejemplos que se encontraban en el Libro II de los *Elementos* de Euclides y los presenta a través de ejemplos numéricos. Su trabajo específico con ecuaciones algebraicas es desarrollado a través de, inicialmente los casos simples, como: $x^2 = bx$ y $x^2 = c$, y luego, en base a las ecuaciones propuestas por Al-Khwārizmi, trabaja las ecuaciones de tipo: $x^2 + bx = c$, $x^2 = bx + c$ y $x^2 + c = bx$. De los ejemplos de ecuaciones que habían sido usadas por Al-Khwārizmi, Leonardo Fibonacci usó solo la del 4º tipo, $x^2 + 10x = 39$, y presenta dos demostraciones geométricas para esta ecuación. En la primera utiliza el mismo resultado adoptado por Al-Khwārizmi y la misma demostración geométrica, como se muestra en la siguiente figura.



Para la segunda demostración de esta ecuación, Fibonacci utiliza los estudios hechos por Abu Kāmil y para los otros tipos de ecuaciones, los ejemplos dados por Savasorda[22], mostrando así su presencia en el mundo árabe y el conocimiento de las matemáticas que allí se desarrollaban. A través de Leonardo de Pisa, el conocimiento algebraico iniciado en el mundo árabe es divulgado en Europa. En su obra matemática, además de utilizar varios ejemplos de ecuaciones que fueron introducidos por los árabes, también introduce y analiza ejemplos de su propia creación. De hecho, en varios de estos casos de los ejemplos creados por Fibonacci, solo se realizó el cambio de constantes. Sin embargo, fueron utilizados ejemplos que culminaron en el uso de números negativos e irracionales como forma de resolución, algo que los árabes no hicieron a menudo. Otro ejemplo de la originalidad de Fibonacci fue el uso del "cero" como la raíz de una ecuación cuadrática, un resultado que los árabes no trabajaron.[23]

---

[21] Ver en Tropfke 1993-33, 44, 108.

[22] Los ejemplos usados son: $x^2=10x+39$ y $x^2+40=14x$.

[23] Ver en Tropfke 1993-33, 44, 110.

También en la Edad Media europea aparecieron otros manuscritos matemáticos, relacionados con el tema de la resolución de ecuaciones cuadráticas, que tenían su origen en traducciones de obras de los árabes, pero lo más destacado es realmente lo de Fibonacci, quieninnovó e hizo tales estudios más completos y allanó el camino para su avance que alcanza el apogeo en el Renacimiento.

Obtención de resultados finales

Renacimiento europeo

El Renacimiento europeo está marcado por numerosos avances en matemática y, en particular, se puede decir que el estudio de la resolución de ecuaciones de 2º grado logra su resultado final. Este resultado es conocido y ampliamente utilizado durante el desarrollo curricular de matemáticas en la actualidad. El gran marco del desarrollo algebraico en el período se le atribuye al francés François Viète (1540-1603), quien introdujo una convención simple, pero fructífera, en el tratamiento de ecuaciones algebraicas. Viète usó letras del alfabeto latino para representar, en álgebra, cantidades desconocidas o indeterminadas, y supuestas cantidades o números o datos conocidos. Esta convención creada por Viète sufrió una pequeña modificación[24] y pasó a ser adoptada en el caso de las ecuaciones de 2º grado, que llegó hasta la actualidad, en la siguiente forma general: $ax^2 + bx + c = 0$, con las primeras letras del alfabeto (en los casos a, b y c) que representan las cantidades conocidas y las últimas (en este caso x) las cantidades desconocidas, o indeterminadas.

Unas décadas antes de Viète, el tema de la *resolución de ecuaciones algebraicas* se apoderó de los debates académicos. Estos, sin embargo, se referían a la resolución de ecuaciones de grado superior a 2, que en ese momento era un problema abierto. Faltaban, sin embargo, algunos retoques para una solución general de una ecuación de 2º grado de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, dado que hasta ese momento se habían resuelto algunos casos particulares. Algunas contribuciones fueron dadas por los "abacistas" y "cosistas"[25], en el siglo XV y principios del XVI, que trabajaron con ecuaciones de 2º grado en busca de resultados prácticos. Michael Stifel (1486-1567), pastor luterano, buscó, en su obra *Arithmetica integra* (1544), una forma de reunir los resultados relativos a los casos entonces conocidos en una sola fórmula. Para esto, aisló el término en x^2 y obtuvo los siguientes resultados:

[24] Viète usó una vocal para representar una cantidad desconocida o indeterminada, y una consonante para representar una cantidad o número conocido o dado. Bo yer 1974, 223.

[25] Abacistas: derivado de ábaco – personas que fueron conocidas con este nombre porque se dedicaron a utilizar el ábaco. Cosistas: derivado de "cosa" – personas que llamaban lo desconocido como "cosa". En ambos casos estas personas se dedicaban al cálculo (eran conocidas como "maestros del cálculo"). Algunos de ellos profundizaron en los estudios de las ecuaciones algebraicas. Ver en Wubing 1991, 1992, 1992a y 1999.

1) $x^2 = c - bx \Rightarrow x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}$

2) $x^2 = bx + c \Rightarrow x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} + \frac{b}{2}$

3) $x^2 = bx + c \Rightarrow x = \mp\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c} + \frac{b}{2}$

y, para la solución general, Michael Stifel adoptó la siguiente fórmula:

$$x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 \mp c} \mp \frac{b}{2}$$

Como puede verse, en el tercer caso presentado, Stifel considera la existencia de dos raíces. Sin embargo, él no trabajó con raíces negativas.

Cardano

Un personaje que tiene una fuerte presencia en la historia de la resolución de ecuaciones algebraicas es el italiano Girolamo Cardano (1501-1576). Su nombre, junto con el de Nicoló Tartaglia (1500—1557), está vinculado a la resolución de ecuaciones del tipo $x^3 = px + q$. En su obra principal *Ars magna* (1545)[26], Cardano analiza asuntos relativos a la resolución de ecuaciones de grado superior a 2, pero, en el capítulo 5, trata las ecuaciones de 2º grado donde propone y resuelve varios problemas de este orden. El interés de Cardano por las ecuaciones de segundo grado surge de sus intentos por resolver ecuaciones de 3º grado. En el capítulo I del libro, cuando trata sobre ecuaciones cúbicas, como, por ejemplo, $x^3 + 16 = 12x$, $x^3 + 9 = 12x$, encuentra el valor de una de las raíces y entonces lo transforma en una ecuación de 2º grado que necesita ser resuelta. Para ello, desarrolla estudios paralelos a las ecuaciones cúbicas, con el objetivos de resolver las cuadráticas.

Las tres formas de una ecuación cuadrática que eran más comunes fueron reelaboradas por Cardano. Las dispuso de tal manera que fueron eliminados los casos en los que aparece el "signo menos". Sus resultados son los siguientes:

1) $x^2 = bx + c \Rightarrow x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} + \frac{b}{2}$

2) $c = x^2 + bx \Rightarrow x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c} - \frac{b}{2}$

[26] Esta obra fue traducida al inglés por T. Richard Witner y editada en 1968 por M.I.T. Press. En 1993 fue publicada una edición de la obra por Dover. Ver en Cardano 1993.

3) $bx = x^2 + c \Rightarrow x = \frac{b}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$

Para las demostraciones, Cardano se basó en los resultados contenidos en los textos de Euclides y Al-Khwārizmi y presenta diferentes demostraciones geométricas para cada ejemplo dado. Cardano también resuelve algunos ejercicios y propone otros que puedan resolverse en base a las formulaciones presentadas por él. Una importante novedad que se discute durante la resolución de estos problemas es que adopta la existencia de raíces negativas y, en algunos casos, asume tímidamente, la existencia de raíces complejas. Para los casos de raíces positivas en ecuaciones del tipo $x^2 + c = bx$, históricamente se supone que Cardano conocía la relación entre esas raíces, es decir, él sabía que $x_1 + x_2 = b$ y $x_1 x_2 = c$.[27]

En el capítulo 5 de su libro *Ars magna*, Cardano presenta 10 problemas de los cuales , según él, 8 son de su propia creación, y los resuelve. Como ejemplo se presenta el problema número 9 y la resolución dada.[28]

(Problema 9) *Divida 10 en dos partes de modo que la mayor parte restada de su raíz cuadrada sea igual a la parte más pequeña agregada a su raíz cuadrada.*

Resolución: Está claro que la diferencia entre la parte más grande y la más pequeña es dos veces la raíz cuadrada del más grande más dos veces la raíz cuadrada del más pequeño. Considere esta diferencia $\sqrt{4x}$ y considere que una parte es $5 + \sqrt{x}$ + y la otra es $5 - \sqrt{x}$. Tomar la suma de las raíces de esas partes y esto es, según el libro 4, la *raíz más grande universal* $\sqrt{10 + \sqrt{100 - 4x}}$ y dos veces esto es igual a $\sqrt{4x}$. La mitad de una es igual a la mitad de la otra, es decir, $\sqrt{x}$ de la segunda raíz. Y el cuadrado de una es igual al cuadrado de la otra, es decir: $x = 10 + \sqrt{100 - 4x}$.

Por lo tanto $x - 10 = \sqrt{100 - 4x}$.

El cuadrado de un término es igual al cuadrado del otro: $x^2 + 100 - 2x = 100 - 4x$.

Por lo tanto x^2 es igual a $16x$ y x es igual a 16. Pero queremos que la diferencia entre las partes sea $\sqrt{4x}$. Entonces la diferencia es $\sqrt{64}$, que es 8. Hasta ahora hemos evitado la cuarta potencia en el uso de $\sqrt{x}$.

El período en el que Cardano publicó su obra es un hito en la historia de las matemáticas, pues otros grandes matemáticos fueron motivados a seguir el camino trazado por él en busca de

[27] Tropkke 1933-34, 44, 114

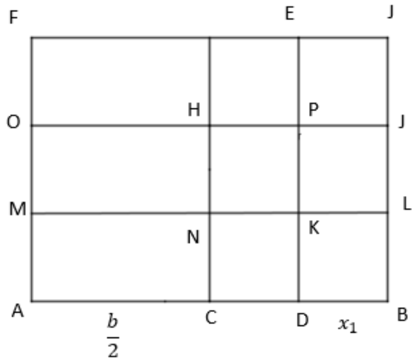
[28] La traducción del inglés al portugués fue hecha por el autor. Ver en Cardano 1993, p. 46.

resultados convincentes en relación a la resolución de ecuaciones de grado superiores a 2. Una feroz disputa académica sobre este fue librada por Nicoló Tartaglia (1500-1557) y Ludovico Ferrari (1522-1565). Ferrari, alumno de Cardano que alcanzó los primeros resultados para la resolución de ecuaciones de 4º grado, defendió al maestro contra los ataques de Tartaglia que lo acusaba de plagiar sus ideas. Algún tiempo después se descubrió que antes del nacimiento de Tartaglia y Cardano, el también italiano Scipione del Ferro (1465-1565) había descubierto en 1500 un método para resolver algunas ecuaciones específicas de tercer grado. Pero no había dado a conocer sus resultados.

Entre quienes realizaron estudios referidos a ecuaciones algebraicas, se destacó Rafaele Bombelli (1526-1572), un ingeniero de Bolonia y autodidacta en matemáticas. En 1572, Bombelli escribió una monografía de 5 capítulos, siendo 3 dedicados al álgebra. En estos textos,cuyo título es *L'Algebra*, Bombelli también buscó nuevos resultados para la resolución de ecuaciones en general. Específicamente, el tercer capítulo de esta obra está dedicado a los temas tratados por Diofanto, donde se encuentran las ecuaciones de 2º grado. En cuanto a nuevos resultados, Bombelli no presenta nada; sigue los ejemplos que habían sido utilizados por sus predecesores. Sin embargo, innova en la forma de redactar los ejercicios matemáticos presentados. Resuelve los ejercicios propuestos de dos formas: en forma de disertación, como era común en la época, y en la forma a través de símbolos inventados por él mismo. Bombelli hizo una gran contribución en relación con el surgimiento del álgebra simbólica que ganaría espacio unos años más tarde. Bombelli también usa la geometría para demostrar los resultados presentados en la resolución de ecuaciones de 2º grado, y para ello recurre a los métodos adoptados por los árabes Abu Kāmil y Alkarhi. Entre los ejercicios propuestos y resueltos por Bombelli en su texto, algunos son similares a los que habían sido presentados por sus predecesores. Otros avanzan con respecto a lo hecho hasta entonces, ya que se presentan ecuaciones cuadráticas cuyos resultados recaen en números imaginarios. Bombelli también trabaja en una serie de ejercicios involucrando ecuaciones bicuadráticas y también ecuaciones de grado 6.

Clavius

Otras contribuciones importantes para el desarrollo de estudios relacionados a la resolución de ecuaciones de 2º grado fueron hechas por Clavius y Stevin en la segunda mitad del siglo XVI. Christoph Clavius (1538-1612), jesuita alemán nacido en la ciudad de Bamberg. En 1571, Clavius publicó su obra más importante, la traducción comentada de los *Elementos de Euclides*. Debido a este trabajo, era conocido en los círculos académicos de su época como “el Euclides del siglo XVI”. En sus *Elementos*, Clavius presenta una gran cantidad de notas explicativas, que fueron recopiladas de otras ediciones previamente publicadas. En este texto, se presentan las demostraciones geométricas de problemas relacionados con las ecuaciones cuadráticas que aparecen en los *Elementos* de Euclides. En la obra *Álgebra* (1608), Clavius presenta la siguiente demostración geométrica para resolver ecuaciones del tipo $x^2 = bx - c$.



- $m(AC) = m(CB) = \frac{1}{2b}$? $m(AB) = b$
- $m(AO) = m(AC) = m(BJ) = m(CB)$? los cuadrados $AOHC$ y $CHJB$ tienen áreas iguales a $(1/2b^2)$
- *m(DB)* es una de las raíces de la ecuación y $m(AD)$ es la otra raíz $\Longrightarrow$ $m(DB) = x_1\ y\ m(AD) = x_2$ y esto debe demostrarse.
- El cuadrado AFED tiene un área $(x_2)^2$ y el área del rectángulo $AFGB$ es bx_2.
- El área del rectángulo $DEGB$ es $bx_2 - (x_2)^2$, es decir, igual a c.
- Como el rectángulo $AMKD$ es congruente con el rectángulo $DEGB$, su área también es igual a c.
- La figura formada por los puntos $CMKPJB$ también tiene un área igual a c.
- Si quitamos la figura $CMKPJB$ del cuadrado del lado CB, tendremos el área del cuadrado $NHKP$, que es igual al cuadrado del lado CD, igual a $(1/2b^2) - c$, entonces
- $m(CD) = \sqrt{b/2)^2 - c}$
- Dado que $m(AC) = 1/2b = m(CB)$, entonces se pueden calcular las raíces x_1 y x_2.

El ingeniero militar belga Simon Stevin (1548-1620) publica en el año 1585 la obra *Practique d'Arithmétique* donde presenta prácticamente un conjunto de los resultados obtenidos por Stifel, Cardano y Bombelli. El principal hecho histórico existente en la obra de Stevin es que, al presentar las demostraciones geométricas hechas por al-Khwārizmi, lo proclama como el responsable de descubrir la solución para ecuaciones cuadráticas.

Primeros resultados generales

Aprovechando la indicación de Simon Stevin que considera a Al-Khwārizmi como el descubridor de la resolución de la ecuación de 2º grado, analizaremos sus resultados y los comparemos con los resultados conocidos actualmente.

Los resultados de Al-Khwārizmi son los siguientes:

1. ecuaciones de 4º tipo: $x^2 + bx = c \Rightarrow x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2} = \frac{\sqrt{b^2-4ac}-b}{2}$

2. ecuaciones de 5º tipo: $x^2 + c = bx \Rightarrow x = \frac{b}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c} = \frac{b \mp \sqrt{b^2-4ac}}{2}$

3. ecuaciones de 6º tipo: $x^2 = bx + c \Rightarrow x = \frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} = \frac{b+\sqrt{b^2+4c}}{2}$

Si hacemos una reordenación asumiendo la existencia de números negativos y consideramos los tres tipos de ecuaciones propuestos por Al-Khwārizmi, estos pueden ser escritos de la siguiente manera:

1. ecuaciones de 4º tipo: $x^2 + bx - c = 0$
2. ecuaciones de 5º tipo: $x^2 - bx + c = 0$
3. ecuaciones de 6º tipo: $x^2 - bx - c = 0$

Esto equivale a escribir la ecuación en forma general: $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a = 1$ y b y c son números enteros.

Para encontrar la fórmula de la ecuación en forma general: $ax^2 + bx + c = 0$, adoptamos el proceso utilizado por Bombelli para transformar la ecuación dada en un trinomio.

- Sea la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$
- pasando el término independiente para el segundo miembro de la ecuación, tenemos

$$ax^2 + bx = - c$$

- dividiendo a ambos miembros por a

$$x^2 + \frac{b}{a}x = - \frac{c}{a}$$

- los términos de la izquierda se pueden considerar como los dos primeros del desarrollo del cuadrado de un binomio. Se busca el tercer término.

- x es el primer término del binomio. Considere m el segundo término, luego:

$$2.x.m = \frac{b}{a}x \Rightarrow m = \frac{b}{2a}$$

- por lo tanto, el binomio será:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2} \Rightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \Rightarrow x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Este resultado generalizado fue desarrollado por William Outghtred (1574-1660), matemático y teólogo inglés, y presentado en la obra *Clavis mathematica, cum tractatu de resolutione equationum in numeris* ... (1631), una obra que obtuvo gran repercusión en Inglaterra, habiendo sido muy elogiado por John Wallis e Isaac Newton. El concepto de *discriminante*, dado al término $b^2 - 4ac$, fue introducido en el siglo XIX por el matemático inglés James Joseph Sylvester (1814-1897).

François Viète y las propiedades de las raíces

Por haber introducido el uso de las letras del alfabeto para representar magnitudes conocidas y desconocidas, François Viète (1540-1603) es reconocido en la historia de las matemáticas como el fundador del álgebra simbólica. Su obra matemática, sin embargo, no es muy amplia, ya que su principal desempeño profesional fue en el área judicial. La obra en la que Viète expone sus teorías sobre ecuaciones es *De equationum recognitione et emendatione tractatus duo*, donde son presentadas ecuaciones de diferentes tipos y sus transformaciones en forma canónica. En este texto Viète presenta lo que se ha conocido en la historia de las matemáticas como el "Método de Viè*te*" para las raíces de una ecuación de 2º grado:

- Sea la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, y sus raíces x_1 y x_2
- si sumamos y multiplicamos las raíces tenemos:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 . x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} . \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{c}{a}$$

Comentarios finales

Después de todo, ¿a quién se debe el descubrimiento de la fórmula de la resolución de una ecuación de 2º grado? ¿A los babilonios que poseían una avanzada forma de resolución de problemas involucrando ecuaciones cuadráticas? ¿A los griegos que las resolvían a partir de la geometría? ¿A Diofanto? ¿A los hindúes? ¿A los árabes? Esta es una pregunta difícil de responder. Pero de una cosa se puede estar seguro: es una injusticia para todos aquellos que trabajaron en el tema y llegaron a resultados importantes si se le da a Bhāskara la responsabilidad del descubrimiento de esta fórmula. Quizás sea por eso que la comunidad internacional no adopta un nombre para esta conocida fórmula. Nos queda saber entonces la razón por la que algunos autores brasileños bautizaron la fórmula de resolución de una ecuación de 2º grado como fórmula de Bhāskara.

Referencias bibliográficas

BARTH, Friedrich & FEDERLE, Reinhold & HALLER, Rudolf. *Algebra 9*. München: Oldenburg, 1997.

BEKKEN, Otto B. *Equações de Ahmes até Abel*. Trad. de José Paulo Carneiro. Rio de Janeiro: USU - CEPEM. 1994.

BERGGREN, J. *Episodes in the Mathematics of the Medieval Islam*. New York Springer-Verlag, 1986.

Bhāskara & BRAHMAGUPTA. *Algebra with Arithmetic and Mensuration from the Sanscrit of Brahmegupta and Bháscara*, trad. Henry Tomas Colebrooke, London, John Murray. 2 vol, 1817.

BOYER, Carl. B. *História da Matemática*. Tradução do inglés para o portugués de Elza Gomide. São Paulo: Edgard Blücher Ltda. 1974.

CARDANO, Girolamo. *Ars magna or the rules of algebra*. Dover edition — translated and edited by T. Richard Witmer. New York: Dover Publications, Inc, 1993.

CARVALHO, Fernanda et all. "Por que Baskhara?". *História & Educação Matemática*. V. 2, nr. 2, 123-171. 2001.

CHILD, J. M. "Did Fermat have a solution of the so-called Pellian equation?". *ISIS,* 3, 255-262, 1920.

DATTA, Bibhutibhusan. "The Hindu solution of the general Pellian Equation". *Bulletin of the Calcutta Mathematical Society,* 19, 87-94, 1928.

DATTA, Bibhutibhusan. "The Two Bhāskaras". *Indian Historical Quarterly*, 6 727-736, 1930.

GARBI, Gilberto G. *O Romance das Equações algébricas*. Sáo Paulo: Makron Books, 1997.

KATZ, Victor J. *A History of Mathematics — an introduction*. New York Harper Collins College Publishers, 1993.

MAEDER, Algacyr M. *Lições de Mathematica*. 3' série. São Paulo: Cia. Melhoramentos, 1936.
SCRIBA, Christoph J. "John Pell 's English Edition of the J.H. Rahn's Teutsche Algebra". Boston Studies in the Philosophy of Science, 15, 261-274, 1974.
SELENIUS, Clas-Olof. "Kertenbruchtheoretische Erklarung der Zyklischen Methode zur Lösung der Bhāskara-Pell-Gleichung", in *Acta Academiae Aboensis*, Ekenas, Abo Akademi, 1-44, 1963.
TROPFKE, Johannes. "Zur Geschichte der quadratisehen Gleichungen tiber dreieinhalb Jahrtausend" *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker- Vereinigung*, 43 (98-107) e 44 (26-47, 95-119), 1933-34.
WUBING, Hans. Das 2. Rechenbuch von Adam Ries. In Folkerts, Menso. *Algorismus Studien zur Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften*. Heft 5. München: Institut für Geschichte der Naturwissenschaften, 1991.
WUBING, Hats. Adam Ries. Leipzig: Teubner, 1992.
WUBING, Hans. Das 1. Rechenbuch von Adam Ries. In Folkerts, Menso. *Algorismus Studien zur Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften*. Heft 6. München: Institut für Geschichte der Naturwissenschaften, 1992a.
WUBING, Hans. Die Coss von Abraham Ries. In Folkerts, Menso. *Algorismus Studien zur Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften*. Heft 30. München: Institut für Geschichte der Naturwissenschaften, 1999.