

SISTEMAS DE ESTRUCTURA VARIABLE. APLICACIÓN AL CONTROL CON RESTRICCIONES

Fabrizio Garelli

Director de tesis: Ricardo Julián Mantz

Codirector de tesis: Hernán De Battista

Tesis presentada para el grado de
DOCTOR EN INGENIERÍA



Departamento de Electrotecnia
Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de La Plata

Marzo de 2007

A Lau, Cami y Santi

AGRADECIMIENTO

Quisiera agradecer a todos los que de alguna manera han colaborado para que esta tesis fuese posible. En primer lugar, a Lau, con quien en estos años tuve la suerte de tener dos hermosos hijos, y con quien en definitiva decidí abocarme a este trabajo. Gracias por tu permanente apoyo. También a mis padres, por todo el esfuerzo que hicieron para ayudarnos a abrirnos camino. Y a mis hermanos y amigos, por los indispensables momentos de distracción.

Deseo también agradecer muy especialmente a mis directores de tesis, Ricardo y Hernán, principales responsables de que haya podido cumplir con mis objetivos en tiempo y forma. Por haber confiado en mí y haberme integrado al LEICI, por sus múltiples enseñanzas y la inagotable dedicación.

Finalmente, quiero agradecer a todos los integrantes del LEICI, por su predisposición para colaborar todas las veces que fue necesario, y por el buen clima de trabajo que crean a diario.

ÍNDICE GENERAL

1. Introducción	1
1.1. Motivación de la Tesis	1
1.2. Problemáticas abordadas	2
1.3. Organización y estructura de la Tesis	3
1.4. Principales aportes	4
2. Herramientas para el desacoplamiento dinámico de sistemas MIMO	7
2.1. Conceptos preliminares	7
2.1.1. Modelos de sistemas multivariables	7
2.1.2. Ceros y polos multivariables	9
2.1.3. Matrices de transferencia a lazo cerrado	11
2.1.4. Estabilidad interna	13
2.2. Parametrización de controladores MIMO e inversas aproximadas	14
2.2.1. Parametrización de controladores estabilizantes	14
2.2.2. Control por Modelo Interno	16
2.2.3. Matrices interactoras	17
2.2.4. Inversas aproximadas	21
2.3. Desacoplamiento dinámico de sistemas multivariables	22
2.3.1. Sistemas estables de mínima fase	22
2.3.2. Sistemas estables de no-mínima fase	24
2.3.3. Sistemas inestables	29
2.4. Limitaciones de performance debidas a características de no-mínima fase	30
2.4.1. Costos del desacoplamiento diagonal	30
2.5. Resumen del capítulo	33
3. Control por Modo Deslizante	35
3.1. Introducción	35
3.2. Descripción del modo deslizante	36
3.3. Condición necesaria para existencia del modo deslizante	37
3.4. Método del control equivalente	41
3.5. Condición necesaria y suficiente para la existencia del modo deslizante	42
3.6. Dinámica del modo deslizante ideal	44
3.7. Propiedades de robustez del modo deslizante	46
3.8. Aplicación del MD en sistemas con modelos en forma normal	52

3.8.1.	Grado relativo y transformación a forma normal	53
3.8.2.	Diseño de la superficie	55
3.8.3.	Forma normal para grado relativo $\rho < n$ y dinámica inversa	56
3.9.	Observadores por modo deslizante	57
3.10.	Posibles causas de deterioro de la performance	60
3.11.	Resumen del capítulo	62
4.	Desacoplamiento dinámico con restricciones de entrada	63
4.1.	Introducción	63
4.2.	Restricciones en la entrada a la planta	65
4.2.1.	<i>Windup</i>	65
4.2.2.	Cambio de direccionalidad del control	67
4.3.	Acondicionamiento por MD en sistemas monovariantes	71
4.3.1.	Idea básica	72
4.3.2.	Aplicación 1: estrategia <i>anti-windup</i>	74
4.3.3.	Aplicación 2: estrategia <i>bumpless</i>	76
4.3.4.	Aplicación 3: restricciones en la planta	79
4.4.	Conservación del desacoplamiento dinámico mediante MD	79
4.4.1.	Formulación del método para sistemas multivariantes	79
4.4.2.	Diseño de las superficies	81
4.4.3.	Dinámica del modo deslizante	82
4.4.4.	Comentarios Adicionales	87
4.5.	Ejemplos	88
4.5.1.	Sistema de mínima fase	88
4.5.2.	Sistema de no-mínima fase	91
4.5.3.	Etapa de molienda de la caña de azúcar	95
4.6.	Resumen del capítulo	99
5.	Control descentralizado con limitación de interacciones	101
5.1.	Introducción	101
5.2.	Control Descentralizado	103
5.2.1.	Descripción de la arquitectura	103
5.2.2.	RGA como medida de interacciones	104
5.2.3.	Selección de estructura de control: sistemas TITO	106
5.2.4.	Controlabilidad Integral Descentralizada	109
5.2.5.	Efecto de las interacciones en el control descentralizado	110
5.3.	Limitación de interacciones por MD	115
5.3.1.	Esquema de control	115
5.3.2.	Descripción del método	117
5.3.3.	Dinámica de salida durante el MD	119
5.3.4.	Comportamiento en presencia de perturbaciones a la salida	120
5.3.5.	Comentarios adicionales	121
5.4.	Ejemplos	121
5.4.1.	Tanque cuádruple	121
5.4.2.	Reactor catalítico	133
5.5.	Resumen del capítulo	135

6. Desacoplamiento parcial para sistemas de no-mínima fase	137
6.1. Introducción	137
6.2. Desacoplamiento parcial y dirección de los ceros en el SPD	139
6.2.1. Restricción algebraica de interpolación	139
6.2.2. Moviendo el efecto de los ceros a una salida	142
6.3. Desacoplamiento parcial con interacciones acotadas	145
6.4. Ejemplos	148
6.4.1. Ejemplo numérico	148
6.4.2. Tanque cuádruple	150
6.5. Resumen del capítulo	156
7. Conclusiones	159
7.1. Futuras líneas de investigación	161
A. Estrategia <i>bumpless</i> con observadores por MD	163
A.1. Introducción	163
A.2. Algoritmo para transferencia <i>bumpless</i>	164
A.2.1. Controladores alternativos	164
A.2.2. Del modo manual al automático	167
A.3. Ejemplo: Tanque cuádruple	169
A.3.1. Conmutación entre controladores alternativos	170
A.3.2. Conmutación Manual/Automática	172
A.4. Resumen del apéndice	175
B. Acondicionamiento de potencia para electrolizadores	177
B.1. Introducción	177
B.2. Descripción del sistema	178
B.2.1. La planta	178
B.2.2. El controlador	180
B.3. Acondicionamiento de la potencia del electrolizador	183
B.4. Resultados de simulación	185
B.5. Resumen del apéndice	189
Referencias	191

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

1.1. Motivación de la Tesis

La gran mayoría de los sistemas *del mundo real* tiene más de una variable cuyo control resulta de interés, y dispone para ello de más de una variable o acción de control. Estos sistemas se conocen como sistemas multivariables o de múltiples entradas y múltiples salidas (MIMO, Multiple-Input Multiple-Output). Los sistemas con una única entrada y una única salida (SISO, Single-Input Single-Output) constituyen en muchos casos un subsistema de un sistema MIMO.

Sistemas multivariables se pueden encontrar en casi todas partes. En el baño de una casa, la temperatura y el caudal de agua en la ducha son variables importantes para un baño placentero. En los procesos químicos frecuentemente se requiere controlar más de una variable simultáneamente, como por ejemplo la presión y la temperatura. Un invernáculo automatizado deberá controlar que la temperatura, la humedad y la iluminación sean las adecuadas para el cultivo que alberga. Un robot necesita seis grados de libertad para tener un rango completo de posicionamiento, y en un avión o un satélite son decenas las variables a controlar.

Algunos fenómenos son propios de los sistemas MIMO, y no ocurren en los sistemas SISO. Por ejemplo, la presencia de *direcciones* asociadas a los vectores de entrada/salida y a las matrices de transferencia es exclusiva de los sistemas MIMO. Debido a ello es que un sistema multivariable puede tener un cero y un polo en la misma ubicación sin que por ello se cancelen. O que en un sistema MIMO de mínima fase los elementos individuales de la matriz de transferencia puedan tener sus ceros en el semi-plano derecho (o viceversa). Sin embargo, la propiedad más importante de un sistema multivariable es quizás el acoplamiento cruzado o las *interacciones* entre sus variables. En efecto, en un sistema MIMO cada variable de entrada puede afectar a todas las salidas o variables controladas del sistema. Esto dificulta enormemente el diseño de los controladores, e impide hacerlo como si se tratase de múltiples lazos monovariabes, ya que los parámetros del controlador en un lazo afectarán a cada uno de

los lazos restantes, pudiendo causar incluso la inestabilidad. Por ello es que las interacciones cruzadas suelen considerarse como la principal causa de dificultad en el control de los sistemas multivariables (Wang, 2003).

Por otro lado, en un lazo de control existen límites físicos, cotas de seguridad o limitaciones asociadas a determinadas características del proceso a controlar que imponen restricciones en la performance alcanzable a lazo cerrado. En particular, las limitaciones físicas y/o tecnológicas de los actuadores dan lugar a restricciones a la entrada de la planta, mientras que regiones de operación segura y características de fase no mínima afectan generalmente la excursión de las variables controladas o salidas. En un sistema multivariable, los efectos e imposiciones de estas restricciones se ven agravados por la *direccionalidad* y las *interacciones* presentes en este tipo de plantas. La búsqueda de soluciones a este problema ha motivado numerosos trabajos de investigación en los últimos años (Special-Issue, 1999, 2003, 2006; Tarbouriech *et al.*, 2007).

1.2. Problemáticas abordadas

En la presente tesis se abordan algunos problemas derivados del acoplamiento cruzado o *interacciones* y de las restricciones tanto a la entrada como a la salida de los sistemas multivariables. Las estrategias de control propuestas se enmarcan dentro del control de estructura variable (CEV) y los regímenes o modos deslizantes (MD) asociados. La aplicación del CEV se restringe a un lazo auxiliar de acondicionamiento de la señal de referencia, lo que dará lugar a un modo operación y a algunas propiedades distintivas respecto a la aplicación convencional del CEV y los MD.

El desacoplamiento dinámico diagonal de un sistema multivariable busca eliminar por completo las interacciones cruzadas, es decir, transformar al sistema MIMO en un conjunto de sistemas SISO. Un ejemplo cotidiano de desacoplamiento dinámico es el que se obtiene con la grifería mono-comando: en ella movimientos en dirección horizontal afectan solamente la temperatura del agua, mientras que las “referencias” en forma vertical afectan el caudal. En cambio, el sistema de grifería convencional (con canillas individuales para agua fría y caliente) está claramente acoplado: la apertura o el cierre de cualquiera de los dos grifos afecta tanto al caudal como a la temperatura. En aplicaciones más críticas, se puede requerir independizar la variación de temperatura entre dos etapas de un proceso químico, o modificar el ángulo de ataque de un avión sin que por ello varíe su altura ni su velocidad. Es decir, el desacoplamiento dinámico es una característica deseable en numerosas aplicaciones prácticas. Uno de los principales objetivos de esta tesis será entonces proponer alternativas con el fin de mejorar el grado de desacoplamiento del lazo cerrado para determinadas características del controlador y/o la planta.

El primer problema que se trata es la preservación del desacoplamiento dinámico completo o diagonal de un sistema lineal MIMO en presencia de restricciones en la entrada a la planta. Si bien existen en la literatura diversos métodos para obtener controladores MIMO centralizados que desacoplen diagonalmente sistemas lineales sin restricciones, la saturación o activación de alguna restricción en los actuadores provoca entre otros efectos indeseados la pérdida del desacoplamiento a lazo cerrado, algo que está estrechamente ligado al cambio de *dirección* en

el vector de entrada a la planta respecto del vector de salida del controlador multivariable. Este problema es abordado en la presente tesis, donde se propone una estrategia basada en el acondicionamiento por MD de las señales de referencia con el objetivo de preservar el desacoplamiento obtenido para la operación lineal del sistema. A diferencia de la mayor parte de los algoritmos que evitan el cambio de dirección del vector de control, el método propuesto no afecta a las variables cuyos set-points permanecen constantes, evitando de esta manera generar transitorios indeseados en estos canales.

En segundo lugar, se estudia el control de sistemas multivariables a través de controladores descentralizados o multi-lazo. En esta arquitectura se basa aún la gran mayoría de las aplicaciones prácticas del control de procesos. Sin embargo, debido a las limitaciones propias de su estructura descentralizada, esta estrategia no puede eliminar las *interacciones* cruzadas entre los distintos lazos del sistema. En esta tesis se estudian las principales características del control descentralizado, y se evalúan los efectos que las *interacciones* cruzadas tienen sobre este tipo de control. Luego, se propone una estrategia para limitar las *interacciones* cruzadas, basada también en conceptos del control de estructura variable, que puede ser fácilmente incorporada a estructuras de control multi-lazo preexistentes. La propuesta muestra ser efectiva en presencia de restricciones a la salida de la planta, ya sean debidas a requerimientos de performance (limitación del acoplamiento) o a modos de operación segura (cotas en la excursión de las variables controladas).

Finalmente, se aborda la búsqueda de alternativas al desacoplamiento dinámico diagonal de sistemas de no-mínima fase (NMF). En efecto, se verá que en este tipo de sistemas el desacoplamiento completo produce un esparcimiento de los ceros en el semi-plano derecho (SPD) entre diversos canales del sistema multivariable, lo que constituye una importante restricción de performance sobre el lazo cerrado. Por otro lado, un control de tipo descentralizado no siempre conduce a respuestas satisfactorias para requerimientos de performance medianamente exigentes. Una alternativa intermedia considerada en la literatura para los procesos de NMF consiste en obtener un desacoplamiento parcial del sistema. Para el diseño de controladores que logren esta característica a lazo cerrado, aquí se combinan estudios sobre el efecto direccional de los ceros en el SPD y sobre la estructura de grado relativo del sistema. Se observa que dependiendo de la dirección asociada a los ceros de NMF y de la naturaleza misma de la planta a controlar, las *interacciones* remanentes pueden llegar a ser de gran amplitud. Por lo tanto, con vistas a mejorar el grado de desacoplamiento del lazo cerrado, se propone en este último caso aplicar el acondicionamiento de la referencia por MD. Esta metodología permite limitar las interacciones que no fueron eliminadas por el desacoplamiento parcial, y a diferencia de otras propuestas anteriores, no afecta la variable principal (desacoplada) con respuestas inversas.

1.3. Organización y estructura de la Tesis

La tesis está dividida en siete capítulos, y consta también de dos apéndices. El Capítulo 1 corresponde a esta introducción. En los próximos dos capítulos se exponen los fundamentos teóricos necesarios para el desarrollo de las estrategias de control propuestas, mientras que en los capítulos 4 a 6 se presenta el trabajo original de la tesis. Por último, el Capítulo 7 enumera las conclusiones del trabajo.

A continuación se detallan brevemente los temas que trata cada capítulo:

En el Capítulo 2 se repasan algunas propiedades de los sistemas lineales multivariables, y se brindan las herramientas para el diseño de controladores que logren el desacoplamiento dinámico del lazo cerrado. Al final del capítulo, se evalúan los costos asociados al desacoplamiento dinámico, particularmente en el caso de sistemas de NMF.

El Capítulo 3 presenta las nociones fundamentales del control de estructura variable y los regímenes deslizantes. La mayoría de los conceptos introducidos en este capítulo servirán como sustento teórico del acondicionamiento de las señales de referencia propuesto en los capítulos 4 a 6 para resolver los problemas que fueron mencionados anteriormente.

Los principales aportes de esta tesis se presentan en los capítulos 4 a 6. El Capítulo 4 propone el acondicionamiento por MD de la referencia para preservar el desacoplamiento dinámico en presencia de restricciones en la entrada a la planta. En el Capítulo 5 se estudia la forma de mejorar el grado de desacoplamiento de un sistema de control descentralizado, que permita a su vez una forma de operación segura para la estructura de control predominante en la industria. Por último, el Capítulo 6 plantea la estrategia basada en el desacoplamiento parcial para relajar los costos del desacoplamiento dinámico diagonal en sistemas de NMF.

En el Capítulo 7 se resumen las principales conclusiones extraídas durante el trabajo de tesis, y se plantean posibles líneas de investigación a futuro.

Finalmente, cabe mencionar en esta introducción que los observadores por MD que se presentan en el Capítulo 3 son evaluados en el Apéndice A como una alternativa para reducir los transitorios causados al conmutar del modo manual (lazo abierto) al modo automático (lazo cerrado) en el control de procesos multivariables. Por otro lado, el esquema de acondicionamiento de la referencia mediante una señal auxiliar discontinua se aplica en el Apéndice B al control de un sistema de conversión de energía eólica que alimenta un electrolizador para producir hidrógeno.

1.4. Principales aportes

Los principales aportes presentados en esta tesis se pueden encontrar en (De Battista *et al.*, 2006; Garelli *et al.*, 2005, 2006a, 2006b, 2006c, 2006d, 2007; Mantz *et al.*, 2004, 2005b), y se resumen en los siguientes puntos:

- Combinación de técnicas de acondicionamiento de la referencia con sistemas de estructura variable para su aplicación en diversos problemas del control multivariable con restricciones.
- Desarrollo de estrategias de control para mantener el desacoplamiento de sistemas multivariables aún en presencia de restricciones en los actuadores.
- Limitación de las interacciones cruzadas en sistemas de control descentralizados de procesos con múltiples entradas y salidas.

- Identificación de los efectos combinados de la estructura de grado relativo de la planta y la dirección asociada al cero del semi-plano derecho en el desacoplamiento parcial de sistemas de no-mínima fase.
- Alternativa para relajar los costos asociados al desacoplamiento diagonal en sistemas de no mínima fase, basada en el desacoplamiento parcial del sistema con cotas en el acoplamiento remanente.
- Evaluación del desempeño de los regímenes deslizantes para atenuar los transitorios en la respuesta de sistemas multivariables ocasionados al conmutar del modo manual al automático.
- Aplicación del acondicionamiento por MD de la referencia a un sistema de conversión de energía.

CAPÍTULO 2

HERRAMIENTAS PARA EL DESACOPLAMIENTO DINÁMICO DE SISTEMAS MULTIVARIABLES

En este capítulo se presentan las herramientas de diseño necesarias para el desacoplamiento de sistemas multivARIABLES. En primer lugar, se repasan algunos conceptos básicos de los sistemas lineales multivARIABLES. Posteriormente, se introduce la parametrización afín de los controladores que estabilizan internamente el lazo de control, y la estrechamente ligada estrategia de Control por Modelo Interno (IMC). A partir de esta estrategia se describen procedimientos de diseño para obtener el desacoplamiento dinámico de sistemas estables de mínima fase, estables de no mínima fase e inestables. Finalmente, se analizan los efectos y las limitaciones del desacoplamiento dinámico diagonal en sistemas con ceros en el semi-plano derecho.

2.1. Conceptos preliminares

2.1.1. Modelos de sistemas multivARIABLES

Espacio de estados

Los sistemas lineales MIMO pueden representarse al igual que los sistemas SISO en el dominio del tiempo mediante ecuaciones diferenciales en el espacio de estados. En el caso de un sistema MIMO con entrada $u(t) \in \mathbb{R}^m$ y salida $y(t) \in \mathbb{R}^m$, su modelo en el espacio de estados se puede escribir como:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (2.1)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad (2.2)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$, y $D \in \mathbb{R}^{m \times m}$ son matrices constantes, y $x_0 \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados en el instante $t = t_0$.

Es importante remarcar que las propiedades de controlabilidad y observabilidad conocidas para sistemas SISO a partir de su representación en el espacio de estados son también válidas en los sistemas multivariables.

Matrices de transferencias

Haciendo la transformada de Laplace de (2.1)-(2.2) y tomando $x(0) = 0$ se llega a

$$y(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D] u(s). \quad (2.3)$$

De aquí se define como matriz de transferencia del sistema a

$$P(s) \triangleq C(sI - A)^{-1}B + D. \quad (2.4)$$

En adelante, denotaremos $p_{ij}(s)$ a la función de transferencia entre la j -ésima componente de $u(s)$ y la i -ésima componente de $y(s)$. De esta forma, $P(s)$ puede escribirse en términos de las funciones de transferencia individuales como

$$P(s) = \begin{bmatrix} p_{11}(s) & p_{12}(s) & \dots & p_{1j}(s) & \dots & p_{1m}(s) \\ p_{21}(s) & p_{22}(s) & \dots & p_{2j}(s) & \dots & p_{2m}(s) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ p_{i1}(s) & p_{i2}(s) & \dots & p_{ij}(s) & \dots & p_{im}(s) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ p_{m1}(s) & p_{m2}(s) & \dots & p_{mj}(s) & \dots & p_{mm}(s) \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

En este punto es conveniente recordar la definición de una matriz de transferencia propia, estrictamente propia e impropia:

Definición 2.1. *Se dice que una matriz de transferencia $P(s)$ es propia si todos sus elementos $p_{ij}(s)$ son funciones de transferencia propias (grado denominador mayor o igual que grado numerador), y estrictamente propia si todos sus elementos son estrictamente propios (grado denominador mayor que grado numerador). Todos los sistemas que no son propios son impropios.*

Fracciones matriciales

Otra forma de representar los sistemas lineales MIMO es mediante su descripción en fracciones matriciales. Ésta consiste simplemente en una factorización de la matriz de transferencia $P(s)$.

Considérese una matriz de transferencia propia $P(s)$ de $m \times m$, siendo $d_i(s)$ el mínimo común múltiplo de los polinomios denominadores de la fila i -ésima. Sea $h_i(s)$ un polinomio Hurwitz del mismo grado que $d_i(s)$, entonces $P(s)$ se puede factorizar como

$$P(s) = [P_D(s)]^{-1} [P_N(s)], \quad (2.6)$$

donde

$$P_D(s) = \begin{bmatrix} \frac{d_1(s)}{h_1(s)} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{d_m(s)}{h_m(s)} \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

$$P_N(s) = \begin{bmatrix} \frac{n_{11}(s)}{h_1(s)} & \cdots & \frac{n_{1m}(s)}{h_1(s)} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{n_{m1}(s)}{h_m(s)} & \cdots & \frac{n_{mm}(s)}{h_m(s)} \end{bmatrix}, \quad (2.8)$$

siendo $n_{11}(s), \dots, n_{mm}(s)$ polinomios en s .

Las ecuaciones (2.6), (2.7) y (2.8) conforman una descripción en fracciones matriciales por izquierda (Left Matrix Fraction Description, LFMD) de $P(s)$. Observar que tanto $P_D(s)$ como $P_N(s)$ son matrices de transferencias estables y propias.

Para obtener una descripción en fracciones matriciales por derecha (RFMD) de $P(s)$ se debe seguir un procedimiento análogo pero intercambiando filas por columnas (en este caso $d_i(s)$ será el mínimo común múltiplo de los polinomios denominadores de la i -ésima columna).

2.1.2. Ceros y polos multivariables

Determinar la presencia de los ceros de un sistema multivariable no siempre es inmediato a partir de observar los elementos de la matriz de transferencia $P(s)$. De hecho, los ceros de las transferencias individuales $p_{ij}(s)$ no anulan en general el vector de salida $y(t)$ para entradas no idénticamente nulas en $u(t)$. Es decir, no tienen sobre el sistema multivariable el efecto de “bloqueo” característico de los ceros de los sistemas SISO. Una definición que preserva esta propiedad para los ceros de los sistemas MIMO, debido a lo cual suelen denominarse *ceros de transmisión*, es la que sigue (MacFarlane y Karcnias, 1976)

Definición 2.2 (Ceros multivariables). z es un cero de la matriz de transferencia $P(s)$ si el rango de $P(z)$ es menor que el rango normal de $P(s)$, siendo el rango normal de $P(s)$ el rango de $P(s)$ para todos los valores de s excepto un número finito de singularidades.

A partir de esta definición, existirán vectores constantes y no-nulos $v \in \mathbb{R}^m$ y $h \in \mathbb{R}^m$, conocidos como dirección de entrada y de salida del cero en $s = z$ respectivamente, tales que

$$P(z)v = 0 \in \mathbb{R}^m, \quad (2.9)$$

$$h^T P(z) = 0 \in \mathbb{R}^m. \quad (2.10)$$

Los vectores v y h son parte de los espacios nulos generados por las columnas y filas de $P(s)$, respectivamente. El número de vectores linealmente independientes que satisfacen (2.9) o (2.10) dependen de la pérdida de rango de $P(s)$ al evaluarse en $s = z$. Este número se conoce como *multiplicidad geométrica* del cero, y es igual a la dimensión del espacio nulo generado por las columnas o filas de $P(s)$.

Sin demasiada rigurosidad, los polos de un sistema multivariable pueden definirse en general como aquellos valores finitos $s = p$ donde $P(s)$ tiene una singularidad (“es infinita”). Así, dado un polo de $P(s)$ en $s = p$ se puede escribir

$$P(p)v_p = \infty, \quad (2.11)$$

$$h_p^T P(p) = \infty, \quad (2.12)$$

donde v_p y h_p son la dirección de entrada y de salida del polo en $s = p$, respectivamente.

En el caso de sistemas cuadrados, los ceros y los polos de $P(s)$ pueden calcularse a partir de los ceros y polos del determinante de $P(s)$. Sin embargo, debido a las direcciones asociadas a los ceros y polos multivariables, para utilizar este simple método debe asegurarse que no haya cancelaciones de polos y ceros al formarse el determinante. De otra manera, podrían estar cancelándose erróneamente polos y ceros en la misma ubicación pero con diferentes direcciones¹.

Ejemplo 2.1 *El determinante del sistema*

$$P(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+2}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{s+1}{s+2} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

es $\det(P(s)) = 1$, a pesar de que el sistema tiene claramente polos en $s = -1$ y $s = -2$ y ceros multivariables en $s = -1$ y $s = -2$. Este es un caso en el que ceros y polos en distintas partes del sistema se cancelan al formar el determinante, por lo que los mismos no pueden obtenerse a partir de la condición $\det(P(s)) = 0$. Se trata de polos y ceros con la misma ubicación pero con distinta dirección; en efecto, el polo en $s = -1$ (y el cero en $s = -2$) tiene direcciones $v_p = h_p = [1 \ 0]^T$, mientras que el cero en $s = -1$ (y el polo en $s = -2$) tiene direcciones $v = h = [0 \ 1]^T$. \square

Definición 2.3 (Sistema de no-mínima fase). *Se dice que un sistema MIMO es de no-mínima fase (NMF) si su matriz de transferencia $P(s)$ tiene ceros en el semi-plano derecho (SPD) o si existe un retardo que puede ser sacado como factor común de todos los elementos de la matriz $P(s)$.*

¹Para más detalles sobre el cálculo de los ceros multivariables véase (Skogestad y Postlethwaite, 2005)

Notar que las ubicaciones de los ceros multivariables o de transmisión no guardan relación alguna con la ubicación de los ceros de las funciones de transferencia SISO individuales que constituyen el sistema MIMO. Luego, es posible que un sistema MIMO sea de NMF aún cuando todas las transferencias SISO sean de mínima fase (MF), y viceversa. Los siguientes ejemplos ilustran ambos casos.

Ejemplo 2.2 *Considérese el sistema*

$$P_1(s) = \frac{1}{(1+s)^2} \begin{bmatrix} s+3 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

Claramente, ninguna de las funciones de transferencia individuales tiene un cero en el SPD. Sin embargo, al considerar el sistema MIMO, se observa que el mismo tiene un cero finito en $s = +3$ con dirección de salida $h = [1 \ -2]^T$. Por lo tanto, (2.14) es un sistema MIMO de NMF a pesar de que todas sus funciones de transferencia SISO son de MF. Esto impone limitaciones de performance al control del sistema MIMO, a pesar de que cada subsistema SISO podría controlarse fácilmente para obtener la dinámica deseada. \square

Ejemplo 2.3 *Sea ahora este otro sistema*

$$P_2(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s-1 & s \\ -6 & s-2 \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

Aquí se da el caso contrario al ejemplo anterior. El sistema multivariable no tiene ceros de NMF, ya que sus ceros están en $s = -1$ y $s = -2$. Sin embargo, $p_{11}(s)$ y $p_{22}(s)$ tienen ceros en el SPD en $s = 1$ y $s = 2$, respectivamente. Obsérvese que para una planta con estas características habrá más limitaciones de performance para controlar cada lazo individualmente (debido a los ceros de NMF) que para controlar el sistema multivariable completo, cuyo lazo cerrado podrá tener mayor ancho de banda que el de cada lazo por separado. \square

2.1.3. Matrices de transferencia a lazo cerrado

Consideraremos una estructura de control con realimentación negativa y unitaria como la que se muestra en la Figura 2.1, donde $P(s)$ representa el sistema a controlar de m entradas y m salidas.

El principal objetivo del control será que el vector de salida $y(t) \in \mathbb{R}^m$, que contiene las variables a controlar, siga las trayectorias deseadas incluidas en el vector de referencias $r(t) \in \mathbb{R}^m$ (objetivo de seguimiento). También se considerará el caso en que se desee mantener

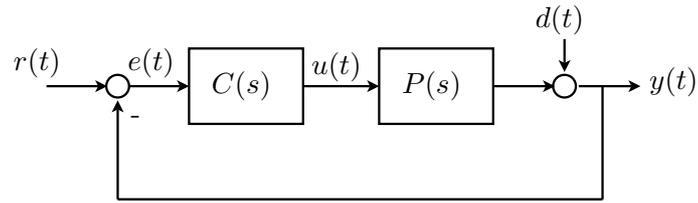


Figura 2.1: Estructura básica de un lazo de control MIMO

a las variables controladas en torno a *set-points* constantes ante la presencia de perturbaciones, representadas por el vector $d(t)$ (objetivo de regulación).

En el dominio de Laplace, la entrada al controlador $C(s)$ será

$$e(s) = r(s) - y(s), \quad (2.16)$$

y su salida

$$u(s) = C(s) [r(s) - y(s)]. \quad (2.17)$$

Las variables controladas se pueden expresar a partir del modelo de la planta multivariable $P(s)$ como

$$y(s) = P(s)u(s) + d(s), \quad (2.18)$$

y reemplazando (2.17) en (2.18)

$$y(s) = P(s)C(s) [r(s) - y(s)] + d(s). \quad (2.19)$$

Luego, la respuesta a lazo cerrado estará dada por

$$y(s) = [I + P(s)C(s)]^{-1} P(s)C(s)r(s) + [I + P(s)C(s)]^{-1} d(s). \quad (2.20)$$

Las matrices de transferencia resultantes a lazo cerrado se conocen como

$$S(s) \triangleq [I + P(s)C(s)]^{-1} \quad \text{función de sensibilidad} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} T(s) &\triangleq [I + P(s)C(s)]^{-1} P(s)C(s) \\ &= P(s)C(s) [I + P(s)C(s)]^{-1} \quad \text{función de sensibilidad complementaria} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Obsérvese que el término *complementario* proviene del hecho que

$$\begin{aligned} S(s) + T(s) &= [I + P(s)C(s)]^{-1} P(s)C(s) + [I + P(s)C(s)]^{-1} \\ &= [I + P(s)C(s)]^{-1} [I + P(s)C(s)] = I. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Así, el error en el control $e(s)$ queda determinado por

$$\begin{aligned} e(s) = r(s) - y(s) &= r(s) - T(s)r(s) - S(s)d(s) = [I - T(s)]r(s) - S(s)d(s) \\ &= S(s)r(s) - S(s)d(s), \end{aligned} \quad (2.24)$$

y la salida del controlador $u(s)$ mediante

$$u(s) = C(s)S(s)r(s) - C(s)S(s)d(s). \quad (2.25)$$

La matriz de transferencia de $r(s)$ a $u(s)$ se suele denotar como

$$S_u(s) = C(s) [I + P(s)C(s)]^{-1}. \quad (2.26)$$

A partir de las matrices de sensibilidad a lazo cerrado, se define la estabilidad interna del lazo de control.

2.1.4. Estabilidad interna

Se dice que un sistema MIMO es estable si todos sus polos están en el semi-plano izquierdo (SPI). Sin embargo, la interconexión de sistemas MIMO como en el lazo de la Figura 2.1 puede dar lugar a modos inestables internos, a causa de potenciales cancelaciones de polos y ceros inestables. Por ello es necesario establecer cuándo un sistema de control es internamente estable. Considérese la siguiente definición:

Definición 2.4 (Estabilidad Interna). *Un sistema de control a lazo cerrado es internamente estable si y sólo si todas las señales en el lazo son acotadas para todo conjunto de entradas acotadas.*

Luego, para que el lazo de control de la Figura 2.1 sea internamente estable, $e(t)$, $u(t)$ e $y(t)$ deben ser acotadas para cualquier entrada $r(t)$ y perturbación $d(t)$ acotadas. O lo que es lo mismo,

Lema 2.1. *El lazo de control de la Figura 2.1 es internamente estable si y sólo si:*

$$S(s) = [I + P(s)C(s)]^{-1} \quad (2.27)$$

$$T(s) = [I + P(s)C(s)]^{-1} P(s)C(s) \quad (2.28)$$

$$S_u(s) = C(s) [I + P(s)C(s)]^{-1} \quad (2.29)$$

son todas estables.

Demostración:

Si $r(t)$ y $d(t)$ son señales acotadas, de (2.20), (2.24) y (2.25) se concluye que la estabilidad de $T(s)$, $S(s)$, y $S_u(s)$ es suficiente para que las señales $e(t)$, $u(t)$ e $y(t)$ permanezcan acotadas.

Por otro lado, si estas señales son acotadas para cualquier entrada $r(t)$ y perturbación $d(t)$ acotadas (sistema internamente estable), de las mismas ecuaciones se observa que $T(s)$, $S(s)$, y $S_u(s)$ serán todas estables. \square

Comentario 2.1 *Obsérvese que en el lazo de la Figura 2.1 no se han considerado perturbaciones a la entrada de la planta. Si esto se hiciera, se debería cumplir además con que la transferencia $S_i(s) = [I + P(s)C(s)]^{-1} P(s) = P(s) [I + C(s)P(s)]^{-1} = S(s)P(s)$ sea también estable para que el lazo sea internamente estable.*

2.2. Parametrización de controladores MIMO e inversas aproximadas

Un concepto básico que está presente en la mayoría de los problemas abordados por la Teoría de Control es el hecho de que el control de un sistema depende, explícita o implícitamente, de la inversión del modelo de la planta. Se comenzará analizando esta cuestión, lo que dará lugar a una discusión alternativa para el diseño de controladores.

2.2.1. Parametrización de controladores estabilizantes

El vector de control $u(s)$ necesario para obtener una respuesta determinada en la variable controlada $y(s)$ podría generarse a lazo abierto a partir del vector de referencias $r(s)$ mediante una matriz de transferencia $Q(s)$, tal como muestra la Figura 2.2.

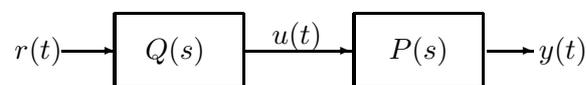


Figura 2.2: Esquema del control a lazo abierto

Esto lleva a una transferencia entrada-salida afín en $Q(s)$:

$$T(s) = P(s)Q(s). \quad (2.30)$$

La ecuación (2.30) muestra la importancia de la inversión, ya que si $Q(s)$ invirtiera el modelo de la planta se lograría un control perfecto, es decir, $T(s) = I$. Esta es una de las razones

por las cuales en este capítulo estudiaremos la forma de construir inversas aproximadas del modelo de la planta.

Por otro lado, hemos visto que la transferencia del lazo cerrado en función del controlador $C(s)$ de un lazo de realimentación convencional como el de la Figura 2.1 está dada por:

$$T(s) = P(s)C(s)[I + P(s)C(s)]^{-1} = [I + P(s)C(s)]^{-1}P(s)C(s). \quad (2.31)$$

Esta expresión depende en forma no-lineal de $C(s)$, lo que dificulta la sintonización del controlador para obtener las características deseadas a lazo cerrado. A partir de (2.30) y (2.31), es inmediato que

$$Q(s) = C(s)[I + P(s)C(s)]^{-1}. \quad (2.32)$$

Luego, despejando $C(s)$ se obtiene la siguiente parametrización del controlador en términos del parámetro afín $Q(s)$

$$C(s) = Q(s)[I - Q(s)P(s)]^{-1} = [I - Q(s)P(s)]^{-1}Q(s). \quad (2.33)$$

conocida como parametrización-Q o *parametrización de Youla*² (Youla *et al.*, 1976; Zames, 1981). Este resultado se formaliza en el siguiente Lema:

Lema 2.2 (Parametrización afín de sistemas estables). *Considere una planta con modelo nominal estable $P(s)$ controlada mediante realimentación unitaria negativa con un controlador $C(s)$, como en el esquema de la Figura 2.1. Entonces, el lazo nominal es internamente estable si y sólo si $C(s)$ puede ser parametrizado como en (2.33), con $Q(s)$ cualquier matriz de transferencia estable y propia.*

Demostración:

A partir de (2.32), las funciones de sensibilidad (2.27)–(2.29) del Lema 2.1 (que deben ser estables para que el lazo sea internamente estable) resultan:

$$C(s) [I + P(s)C(s)]^{-1} = Q(s) \quad (2.34)$$

$$[I + P(s)C(s)]^{-1} = I - P(s)Q(s) \quad (2.35)$$

$$P(s)C(s) [I + P(s)C(s)]^{-1} = P(s)Q(s). \quad (2.36)$$

Dada $P(s)$ estable, las anteriores son todas matrices de transferencia estables y propias si y sólo si $Q(s)$ es estable y propia. \square

Comentario 2.2 *Para sistemas con perturbaciones a la entrada de la planta, la parametrización de Youla también garantiza la estabilidad interna del lazo cerrado, ya que $P(s) [I + C(s)P(s)]^{-1} = P(s) [I - Q(s)P(s)]$ también es estable y propia si $P(s)$ y $Q(s)$ son estables y propias.*

²Nótese que $Q(s) \equiv S_u(s)$ de la Sección 2.1

En este capítulo, aprovecharemos la simplicidad de (2.30) y la idea de buscar una inversa aproximada de la planta para diseñar en primer lugar $Q(s)$, y posteriormente –de ser necesario– obtener $C(s)$ mediante (2.33).

2.2.2. Control por Modelo Interno

Por ser afín en $Q(s)$, la expresión (2.30) simplifica el diseño para obtener una determinada dinámica entrada/salida en $T(s)$. Sin embargo, en la estructura a lazo abierto de la Figura 2.2 no se tiene información de las variables controladas, y por lo tanto se desconocen tanto los efectos de posibles perturbaciones como las desviaciones a causa de la incertidumbre del modelo de la planta.

Una estrategia de control a lazo cerrado que aprovecha la simplicidad del diseño de $Q(s)$ es el Control por Modelo Interno (Morari y Zafiriou, 1989). La Figura 2.3 presenta un diagrama de bloques de esta estrategia. El área encerrada por línea punteada representa el controlador a implementar, ya sea en el software de un microprocesador o mediante electrónica analógica. Como el controlador completo a implementar incluye además de $Q(s)$ al modelo de la planta $P(s)$, a esta estrategia se la conoce como Control por Modelo Interno (IMC) (Garcia y Morari, 1985a,b, 1982).

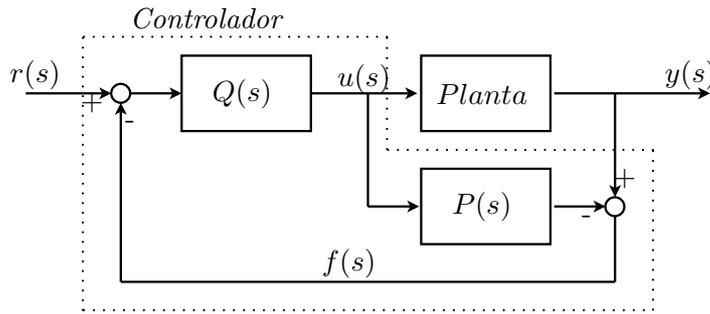


Figura 2.3: Estructura de Control por Modelo Interno (IMC).

Además de las facilidades que brinda para el diseño del lazo cerrado, otra ventaja importante del control IMC es que, dada una planta $P(s)$ estable a lazo abierto, la estabilidad interna del sistema se asegura simplemente eligiendo un controlador $Q(s)$ estable, tal como se verifica en las ecuaciones (2.34) a (2.36).

El control IMC puede obtenerse mediante álgebra de bloques a partir de la configuración básica por realimentación unitaria de la Figura 2.1. La Figura 2.4 muestra la equivalencia de ambas configuraciones: sumando y restando en el esquema de realimentación convencional la señal $P(s)u(s)$ y usando la expresión de $Q(s)$ obtenida en (2.32) se llega a la estructura IMC.

Observar que en esta configuración, la señal realimentada es

$$f(s) = [P(s) - \tilde{P}(s)]u(s) + d(s), \quad (2.37)$$

donde se ha denotado como $\tilde{P}(s)$ a la planta real o sistema físico a controlar. O sea, la señal realimentada $f(s)$ depende exclusivamente de los errores de modelado y de las perturbaciones

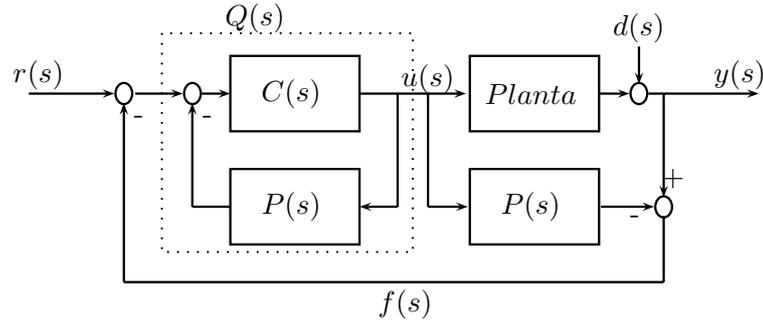


Figura 2.4: Equivalencia entre el control IMC y la estructura de realimentación clásica.

externas. Si el modelo es exacto, es decir, $P(s) = \tilde{P}(s)$ y no hay perturbaciones $d(s)$, la señal realimentada $f(s)$ es cero y el sistema de control queda a lazo abierto.

El razonamiento anterior ilustra en forma sencilla las razones por las que es necesario realimentar en los sistemas de control: la incertidumbre en el modelo de la planta y las perturbaciones o entradas desconocidas.

2.2.3. Matrices interactoras

En sistemas SISO, se dice que el grado relativo (ρ) de una función de transferencia $p(s)$ es el grado de un polinomio $pol(s)$ tal que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} pol(s)p(s) = K, \quad \text{donde } 0 < |K| < \infty. \quad (2.38)$$

El polinomio $pol(s)$ es tal que $pol(s)p(s)$ es bipropio, es decir, que $[pol(s)p(s)]^{-1}$ también es propio. Este polinomio puede hacerse único si se exige que pertenezca a la clase de polinomios $\wp = \{s^k | k \in \mathbb{N}\}$.

En el caso de sistemas MIMO, cada entrada de la matriz de transferencia $P(s)$ puede tener un grado relativo diferente. De esta manera, para generar una condición análoga a (2.38) será necesario definir una matriz que tenga en cuenta las transferencias individuales $p_{ij}(s)$ y sus diferentes grados relativos.

Así, considerando que $P(s)$ es de dimensión $m \times m$, existirán matrices $\xi_l(s)$ y $\xi_r(s)$ tales que las siguientes condiciones se cumplan:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \xi_l(s)P(s) = K_l, \quad \text{donde } 0 < |\det(K_l)| < \infty. \quad (2.39)$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} P(s)\xi_r(s) = K_r, \quad \text{donde } 0 < |\det(K_r)| < \infty. \quad (2.40)$$

Es importante notar que si bien (2.39)-(2.40) establecen que tanto $\xi_l(s)P(s)$ como $P(s)\xi_r(s)$ son bipropios, en sistemas MIMO esto no implica que cada elemento de la matriz de transferencia deba ser una función de transferencia bipropia.

El resultado anterior se formaliza en el siguiente teorema:

Teorema 2.3. *Considere una matriz de transferencia cuadrada $P(s)$ de $m \times m$, no-singular para casi todo s . Entonces, existen únicas matrices de transferencias $\xi_l(s)$ y $\xi_r(s)$, conocidas como matrices interactoras izquierda y derecha respectivamente, tales que se verifican (2.39)-(2.40) y*

$$\xi_l(s) = H_l(s)D_l(s), \text{ con:} \quad (2.41)$$

$$D_l(s) = \text{diag}(s^{p_1}, \dots, s^{p_m}), \quad (2.42)$$

$$H_l(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ h_{21}^l(s) & 1 & \dots & \dots & 0 \\ h_{31}^l(s) & h_{32}^l(s) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ h_{m1}^l(s) & h_{m2}^l(s) & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.43)$$

$$\xi_r(s) = D_r(s)H_r(s), \text{ con:} \quad (2.44)$$

$$D_r(s) = \text{diag}(s^{q_1}, \dots, s^{q_m}), \quad (2.45)$$

$$H_r(s) = \begin{bmatrix} 1 & h_{12}^r(s) & h_{13}^r(s) & \dots & h_{1m}^r(s) \\ 0 & 1 & h_{23}^r(s) & \dots & h_{2m}^r(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.46)$$

siendo $h_{ij}^l(s)$ y $h_{ij}^r(s)$ polinomios en s que satisfacen $h_{ij}^l(0) = 0$ y $h_{ij}^r(0) = 0$.

Comentario 2.3 Si bien en (2.42) y (2.45) los elementos diagonales de las matrices $D_l(s)$ y $D_r(s)$ pertenecen a la clase de polinomios $\wp = \{s^k | k \in \mathbb{N}\}$, los mismos pueden elegirse como polinomios arbitrarios de grados p_1, \dots, p_m y q_1, \dots, q_m respectivamente. En particular, siempre se podrán elegir polinomios Hurwitz, lo cuál es muy importante ya que de esta manera las inversas de $\xi_l(s)$ y $\xi_r(s)$ serán matrices de transferencias estables.

La relevancia de las matrices interactoras o *interactores* radica en que las mismas definen la estructura de grado relativo (o de ceros en el infinito) de un sistema multivariable. Para un sistema de control, $\xi_l(s)$ y $\xi_r(s)$ definen la estructura de mínimo grado relativo de cualquier sensibilidad complementaria que se obtenga a partir de un controlador bipropio.

Construcción de las matrices interactoras

A continuación se presenta un procedimiento para la construcción del interactor izquierdo $\xi_l(s)$, el cual puede ser implementado fácilmente en un algoritmo de programación. El interactor derecho $\xi_r(s)$ se obtiene siguiendo el mismo procedimiento pero intercambiando

los índices de las filas y las columnas. Obsérvese que el desarrollo de este procedimiento puede ser considerado como una demostración (constructiva) del Teorema 2.3. Para mayores detalles sobre el cálculo y las propiedades de los interactores véanse (Wolowich y Falb, 1976; Rogozinsky *et al.*, 1987).

Considérese la fila i -ésima de $P(s)$, la cual denotaremos $[P(s)]_{i*}$. Luego, existe un mínimo entero no-negativo n_i tal que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s^{n_i} [P(s)]_{i*} = f_i^T, \quad (2.47)$$

donde f_i^T es un vector fila no-nulo y finito.

Para construir $\xi_l(s)$ se debe proceder de la siguiente forma:

Paso 1 Elegir la primera fila de $\xi_l(s)$, $[\xi_l(s)]_{1*}$, como:

$$[\xi_l(s)]_{1*} = [s^{n_1} \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]. \quad (2.48)$$

Entonces,

$$[K_l]_{1*} = \lim_{s \rightarrow \infty} [\xi_l(s)]_{1*} P(s) = f_1^T. \quad (2.49)$$

Paso 2 Considere el segundo vector fila, f_2^T . Si f_2^T es linealmente independiente de f_1^T , elegir la segunda fila de $\xi_l(s)$, $[\xi_l(s)]_{2*}$, como:

$$[\xi_l(s)]_{2*} = [0 \ s^{n_2} \ 0 \ \dots \ 0], \quad (2.50)$$

con lo que se tendrá,

$$[K_l]_{2*} = \lim_{s \rightarrow \infty} [\xi_l(s)]_{2*} P(s) = f_2^T. \quad (2.51)$$

Paso 3 Si f_2^T es linealmente dependiente de f_1^T , existirá una constante β_2^1 tal que $f_2^T = \beta_2^1 f_1^T$. Si se eligiera $[\xi_l(s)]_{2*}$ como en (2.50), K_l en (2.39) sería singular. Para evitar esto, se forma

$$[\xi_l(s)]_{2*}^1 = s^{n_2^1} ([0 \ s^{n_2} \ 0 \ \dots \ 0] - \beta_2^1 [\xi_l(s)]_{1*}), \quad (2.52)$$

donde n_2^1 es el único entero que hace

$$\lim_{s \rightarrow \infty} [\xi_l(s)]_{2*}^1 P(s) = f_2^{1T} \quad (2.53)$$

y f_2^{1T} es un vector fila no-nulo y finito.

Si f_2^{1T} resulta linealmente independiente de f_1^T , se toma $[\xi_l(s)]_{2*} = [\xi_l(s)]_{2*}^1$. Si por el contrario $f_2^{1T} = \beta_2^2 f_1^T$, con β_2^2 constante, entonces se repite el proceso hecho en (2.52) pero ahora entre $[\xi_l(s)]_{2*}^1$ y $[\xi_l(s)]_{1*}$:

$$[\xi_l(s)]_{2*}^2 = s^{n_2^2} ([\xi_l(s)]_{2*}^1 - \beta_2^2 [\xi_l(s)]_{1*}). \quad (2.54)$$

Este procedimiento debe repetirse hasta encontrar la independencia lineal o hasta que en la iteración k se llegue a que $n_1 + n_2^k = n_d - n_n$, donde n_d es la suma de los grados de las columnas de $P_D(s)$ y n_n el grado de $\det(P_N(s))$, siendo $P_D(s)$ y $P_N(s)$ una RFMD de $P(s)$. En este último caso, se toma en (2.42) $p_2 = 0$ y se hace a los correspondientes elementos no-diagonales $h_{2j}^l(s)$ iguales a cero.

Paso 4 Calcular las siguientes filas de $\xi_l(s)$ en forma análoga.

Ejemplo 2.4 Considere la matriz de transferencia

$$P(s) = \frac{1}{(s+1)^3} \begin{bmatrix} (s+1)^2 & (s+1) \\ 2(s+1) & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.55)$$

Para construir el interactor izquierdo $\xi_l(s)$ se siguen los pasos descritos anteriormente:

Paso 1: Como en este caso $n_1 = 1$,

$$[\xi_l(s)]_{1*} = [s^{n_1} \ 0 \ 0 \ \dots \ 0] = [s \ 0]. \quad (2.56)$$

Luego,

$$[K_l]_{1*} = \lim_{s \rightarrow \infty} [\xi_l(s)]_{1*} P(s) = f_1^T = [1 \ 0]. \quad (2.57)$$

Paso 2: De la segunda fila de $P(s)$ se observa que $n_2 = 2$ y $f_2^T = [2 \ 0]$.

Paso 3: Dado que f_2^T es linealmente dependiente de f_1^T (con $\beta_2^1 = 2$), se debe elegir la segunda fila de $\xi_l(s)$ como

$$[\xi_l(s)]_{2*}^1 = s^{n_2^1} ([0 \ s^{n_2}] - \beta_2^1 [\xi_l(s)]_{1*}) = [-2s^{(1+n_2^1)} \ s^{(2+n_2^1)}], \quad (2.58)$$

donde n_2^1 se halla para que

$$f_2^{1T} = \lim_{s \rightarrow \infty} [\xi_l(s)]_{2*}^1 P(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \frac{-2s^{1+n_2^1}}{(s+1)^2} & \frac{-s^{2+n_2^1} - 2s^{1+n_2^1}}{(s+1)^3} \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

sea un vector fila no-nulo y finito. De esta manera, se obtiene $n_2^1 = 1$ y $f_2^{1T} = [-2 \ -1]$, que es linealmente independiente de f_1^T .

Así, el interactor izquierdo queda finalmente

$$\xi_l(s) = \begin{bmatrix} s & 0 \\ -2s^2 & s^3 \end{bmatrix}. \quad (2.60)$$

Comentario 2.4 Hemos visto que los interactores describen la estructura de los ceros en ∞ de un sistema multivariable. Luego, la misma idea básica del Teorema 2.3 puede usarse para describir la estructura de los ceros finitos en el SPD de una planta. Las matrices asociadas resultantes se conocen como *interactores- z* (Weller y Goodwin, 1996; Silva y Salgado, 2005).

2.2.4. Inversas aproximadas

A continuación se describe cómo obtener una inversa propia aproximada de una planta estrictamente propia $P(s)$ a partir del uso de las matrices interactoras. Obsérvese que tanto $\Lambda_l(s) = \xi_l(s)P(s)$ como $\Lambda_r(s) = P(s)\xi_r(s)$ son matrices de transferencia bipropias con ganancia no-singular en alta frecuencia. Su descripción en el espacio de estados es de la forma:

$$\dot{x}(t) = \bar{A}x(t) + \bar{B}u, \quad (2.61)$$

$$y = \bar{C}x(t) + \bar{D}u, \quad (2.62)$$

donde \bar{A} , \bar{B} , \bar{C} y \bar{D} ($\det(\bar{D}) \neq 0$) son las matrices “A”, “B”, “C” y “D” de la planta modificadas por la compensación que introduce la matriz interactora. Las ecuaciones (2.61) y (2.62) pueden invertirse simplemente intercambiando los roles de las entradas y las salidas, lo que da lugar a la siguiente realización de $\Lambda_l^{-1}(s)$ o $\Lambda_r^{-1}(s)$:

$$\dot{x}(t) = \bar{A}x(t) + \bar{B}\bar{D}^{-1}(y - \bar{C}x(t)), \quad (2.63)$$

$$\bar{u} = \bar{D}^{-1}(y - \bar{C}x(t)), \quad (2.64)$$

donde \bar{u} es la salida de la inversa (\bar{u} es una estimación de la entrada a la planta u). Agrupando términos, y denominando $\tilde{u} = y$, la representación en el espacio de estados (2.63)-(2.64) resulta:

$$\dot{x}(t) = A_\lambda x(t) + B_\lambda \tilde{u}, \quad (2.65)$$

$$\bar{u} = C_\lambda x(t) + D_\lambda \tilde{u}, \quad (2.66)$$

donde:

$$A_\lambda = \bar{A} - \bar{B}\bar{D}^{-1}\bar{C} \quad (2.67)$$

$$B_\lambda = \bar{B}\bar{D}^{-1} \quad (2.68)$$

$$C_\lambda = -\bar{D}^{-1}\bar{C} \quad (2.69)$$

$$D_\lambda = \bar{D}^{-1}. \quad (2.70)$$

Las matrices de transferencia $\Lambda_l^{-1}(s)$ y $\Lambda_r^{-1}(s)$ se pueden usar para construir inversas aproximadas propias de $P(s)$. Una inversa aproximada por derecha puede tomarse como

$$P_D^i(s) = \Lambda_l^{-1}(s)\xi_l(0) = [\xi_l(s)P(s)]^{-1}\xi_l(0), \quad (2.71)$$

ya que cumple

$$P(s)P_D^i(s) = [\xi_l(s)]^{-1} \xi_l(0), \quad (2.72)$$

que es triangular inferior e igual a la identidad en $s = 0$.

En forma similar,

$$P_I^i(s) = \xi_r(0)\Lambda_r^{-1}(s) = \xi_r(0) [P(s)\xi_r(s)]^{-1} \quad (2.73)$$

es una inversa aproximada propia por izquierda, dado que

$$P_I^i(s)P(s) = \xi_r(0) [\xi_r(s)]^{-1} \quad (2.74)$$

es triangular superior e igual a la identidad en $s = 0$.

2.3. Desacoplamiento dinámico de sistemas multivariables

A continuación, veremos algunos procedimientos de diseño para obtener el desacoplamiento dinámico en sistemas estables de fase mínima (MF), sistemas estables de fase no-mínima (NMF) y sistemas inestables. Si bien en la literatura pueden encontrarse diversos métodos para desacoplar dinámicamente sistemas multivariables (Hautus y Heymann, 1983; Desoer y Gündes, 1986; Linnemann y Maier, 1993; Eldem, 1994; Wang, 2003; Paraskevopoulos *et al.*, 2005; Yang *et al.*, 2005; Åström y Hägglund, 2006), seguiremos principalmente el desarrollo presentado en (Goodwin *et al.*, 1997) y en (Goodwin *et al.*, 2001), ya que además de ser una de las metodologías más difundidas aprovecha la parametrización de controladores vista en la sección 2.2, la cual nos será de utilidad en capítulos subsiguientes.

2.3.1. Sistemas estables de mínima fase

Para obtener el desacoplamiento dinámico nominal de sistemas estables utilizaremos la parametrización afín, el control IMC y las matrices interactoras presentadas en la sección anterior.

En aquellos sistemas estables con todos sus ceros en el SPI, basta con elegir un controlador IMC $Q(s)$ de la siguiente forma:

$$Q(s) = \xi_r(s)\Lambda_r^{-1}(s)D_Q(s), \quad (2.75)$$

donde

$$\Lambda_r(s) = P(s)\xi_r(s), \quad (2.76)$$

$$D_Q(s) = \text{diag}(t_1(s), t_2(s), \dots, t_m(s)), \quad (2.77)$$

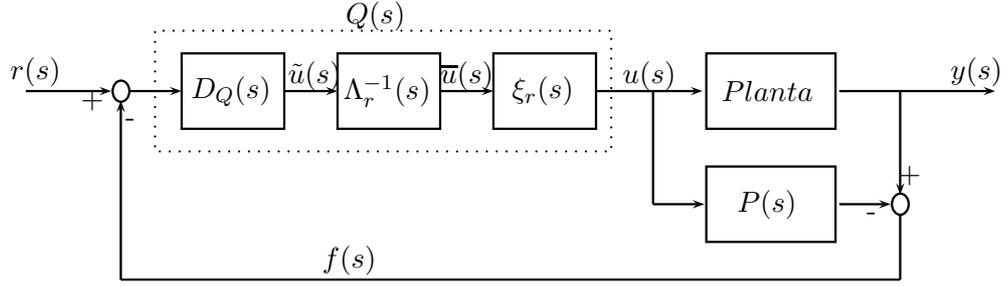


Figura 2.5: Estructura de Control IMC para el desacoplamiento de sistemas de fase mínima.

siendo $\xi_r(s)$ el interactor derecho de $P(s)$ y $t_1(s), t_2(s), \dots, t_m(s)$ funciones de transferencia estables y propias con ganancia unitaria en continua. El controlador $Q(s)$ escogido en (2.75) da lugar a la siguiente sensibilidad complementaria:

$$T(s) = P(s)Q(s) \quad (2.78)$$

$$= P(s)\xi_r(s)\Lambda_r^{-1}(s)D_Q(s) \quad (2.79)$$

$$= \text{diag}(t_1(s), t_2(s), \dots, t_m(s)), \quad (2.80)$$

la cual es diagonal como se buscaba. La estructura del control IMC propuesto se muestra en la Figura 2.5.

A fin de poder implementar el control, se deberá garantizar que el controlador $Q(s)$ sea propio. Notar que de acuerdo a (2.33), si el controlador IMC $Q(s)$ es propio el controlador $C(s)$ de la configuración por realimentación unitaria también lo será. En general, se buscarán controladores bipropios de manera de evitar retardos innecesarios en el sistema. Se puede demostrar que para ello las transferencias $t_1(s), t_2(s), \dots, t_m(s)$ deben tener grado relativo igual al grado de la columna correspondiente del interactor izquierdo de $P(s)$ (Goodwin *et al.*, 2001).

Comentario 2.5 $Q(s)$ en (2.75) puede también ser elegido en términos del interactor izquierdo como $Q(s) = \Lambda_l^{-1}(s)\xi_l(s)D_Q(s)$. También en este caso, las funciones de transferencia $t_i(s)$ deben tener grado relativo igual al grado de las columnas $[\xi_l(s)]_{*i}$ del interactor izquierdo de $P(s)$ para obtener un controlador $Q(s)$ bipropio.

La principal limitación del diseño propuesto en (2.75) es que el controlador $Q(s)$ resultante será estable sólo en el caso en que $P(s)$ sea de fase mínima, dado que tanto $\Lambda_l^{-1}(s)$ como $\Lambda_r^{-1}(s)$ contienen la inversa de $P(s)$.

Ejemplo 2.5 Sea un proceso MIMO con el siguiente modelo

$$P(s) = \frac{1}{4s^2 + 4s + 1} \begin{bmatrix} -s + 2 & 2s + 1 \\ -3 & -s + 2 \end{bmatrix}. \quad (2.81)$$

Este modelo es estable y de fase mínima, por lo que el desacoplamiento dinámico puede obtenerse en forma relativamente sencilla.

Usando el procedimiento de la sección 2.2.3 y tomando polinomios con raíces en $\alpha = -1$ para el interactivo (véase comentario 2.3) se tiene

$$\xi_l(s) = \xi_r(s) = \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}. \quad (2.82)$$

Supóngase que se requiere la siguiente sensibilidad complementaria a lazo cerrado:

$$T(s) = D_Q(s) = \begin{bmatrix} \frac{2s+4}{s^2+3s+4} & 0 \\ 0 & \frac{2s+4}{s^2+3s+4} \end{bmatrix}. \quad (2.83)$$

Obsérvese que las transferencias $t_i(s)$ en $D_Q(s)$ tienen grado relativo igual al grado de las columnas correspondientes de $\xi_l(s)$, lo que garantiza la existencia de un controlador propio que logre la dinámica deseada. Si se toma el interactivo izquierdo $\xi_l(s)$ para realizar el diseño, el controlador que logra el desacoplamiento dinámico deseado a lazo cerrado se obtiene de acuerdo a lo visto en esta sección como

$$Q(s) = \Lambda_l^{-1}(s)\xi_l(s)D_Q(s) = \frac{(s+2)(s+0,5)^2}{(s^2+3s+4)(s^2+2s+7)} \begin{bmatrix} -8(s-2) & -16(s+0,5) \\ 24 & -8(s-2) \end{bmatrix}. \quad (2.84)$$

Dado que este controlador IMC es estable, el sistema realimentado es internamente estable. Las respuestas obtenidas con el controlador (2.84) ante referencias de tipo escalón en los dos canales se presentan en la Figura 2.6, junto con las acciones de control correspondientes. Allí se verifica el desacoplamiento del sistema con la dinámica deseada.

2.3.2. Sistemas estables de no-mínima fase

Encontrar una inversa aproximada para el caso de NMF es algo más complicado debido a que $\Lambda_l^{-1}(s)$ y $\Lambda_r^{-1}(s)$ tendrán polos inestables en la posición de los ceros del SPD de $P(s)$. Luego, la matriz A_λ en (2.65) tendrá autovalores con parte real positiva. Se deberá entonces modificar $Q(s)$ de forma de lograr que sea estable y que mantenga a la vez sus propiedades diagonalizantes.

Con este objetivo, agregamos al controlador $Q(s)$ que obtuvimos para desacoplar sistemas de MF un compensador adicional $D_z(s)$. Este compensador puede ser visto como la matriz de transferencia resultante de estabilizar por realimentación de estados (con ganancia K_i) a cada subsistema de (2.65)-(2.66) con la i -ésima componente del vector de \tilde{u} como entrada, cuya representación en el espacio de estados es:

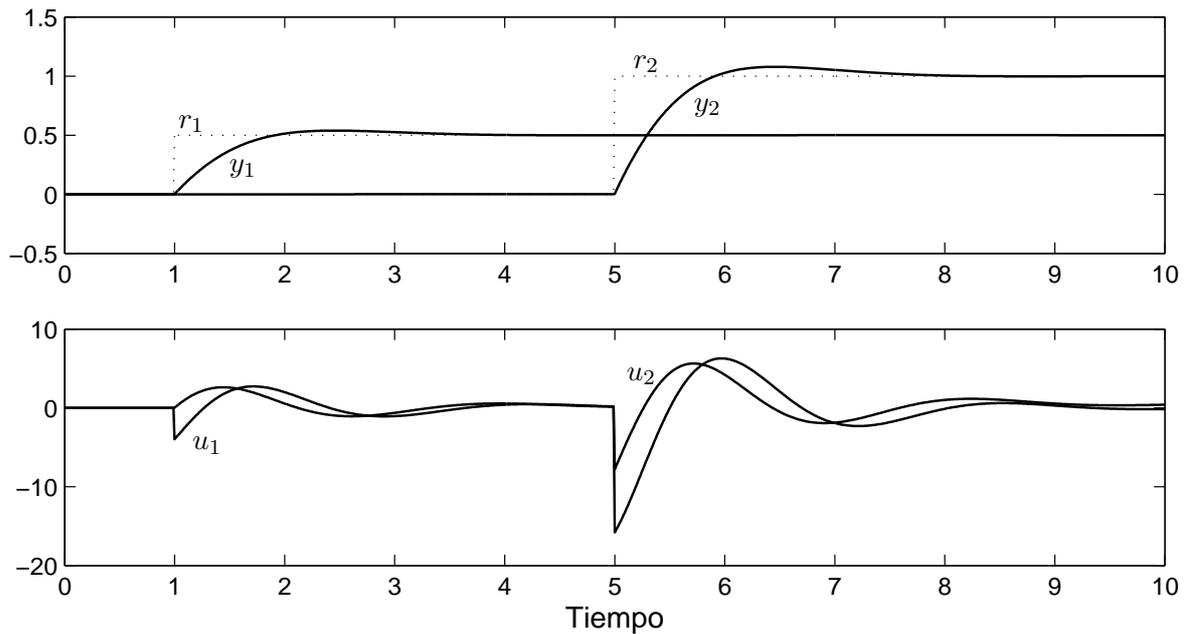


Figura 2.6: Desacoplamiento dinámico del sistema de MF descrito por (2.81)

$$\dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + B_i \tilde{u}_i(t), \quad (2.85)$$

$$v_i(t) = C_i x_i(t) + D_i \tilde{u}_i(t), \quad (2.86)$$

donde $v_i(t) \in \mathbb{R}^m$, $\tilde{u}_i(t) \in \mathbb{R}$ y (A_i, B_i, C_i, D_i) es una realización mínima de $(A_\lambda, B_\lambda e_i, C_\lambda, D_\lambda e_i)$, siendo e_i la i -ésima columna de I_m y $(A_\lambda, B_\lambda, C_\lambda, D_\lambda)$ las matrices de las ecuaciones (2.65)-(2.66).

De esta manera, $D_z(s)$ estará dado por

$$D_z(s) = \text{diag} \left(\left[1 + K_i (sI - A_i)^{-1} B_i \right]^{-1} \right). \quad (2.87)$$

La inversa aproximada estable de $P(s)$ se obtiene entonces mediante el siguiente controlador $Q(s)$:

$$Q(s) = \xi_r(s) \Lambda_r^{-1}(s) D_z(s) D_Q(s), \quad (2.88)$$

tal como se muestra en la Figura 2.7. Esto equivale a

$$Q(s) = P^{-1}(s) \text{diag} \left(\left[1 + K_i (sI - A_i)^{-1} B_i \right]^{-1} \right) \text{diag} (t_1(s), t_2(s), \dots, t_m(s)). \quad (2.89)$$

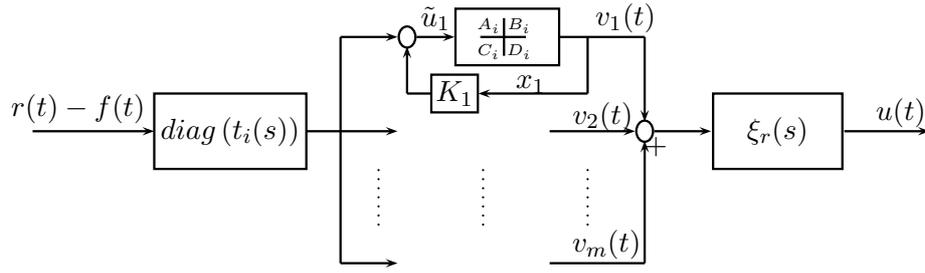


Figura 2.7: Estructura de controlador $Q(s)$ propuesto para el desacoplamiento de sistemas de NMF.

Con este diseño, la matriz de sensibilidad complementaria $T(s)$ resulta:

$$T(s) = \text{diag} \left(\left[1 + K_i (sI - A_i)^{-1} B_i \right]^{-1} t_i(s) \right). \quad (2.90)$$

Debido a que los ceros de no-mínima fase son autovalores inestables de las matrices A_i , los mismos aparecerán inalterados en la matriz $T(s)$, lo que es necesario para la estabilidad interna del lazo cerrado. Esto verifica que la compensación adicionada no compromete la estabilidad interna del sistema, ya que si bien $D_z(s)$ estabiliza $\Lambda_r^{-1}(s)$ -lo que podría verse como una cancelación de polos y ceros inestables-, estas matrices de transferencia tienen sentido sólo a los efectos del cálculo del controlador $Q(s)$, pero no constituyen sistemas físicos dentro del lazo de control. A su vez, dependiendo de la dirección de salida asociada a los ceros en el SPD, éstos se expandirán entre los diferentes canales del sistema desacoplado. Ésta es una limitación inherente al desacoplamiento de sistemas de no-mínima fase, que trataremos nuevamente más adelante y que será a su vez uno de los principales problemas a abordar en esta tesis.

Ejemplo 2.6 *Considérese una planta de 2×2 con el siguiente modelo nominal*

$$P(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.91)$$

Esta planta es de NMF ya que tiene un cero de transmisión en $s = +1$. Por lo tanto, deberemos seguir el procedimiento descrito en este punto para sintetizar un controlador que desacople el sistema a lazo cerrado. Con este fin, calculamos en primer lugar los interactores derecho $\xi_r(s)$ e izquierdo $\xi_l(s)$ de $P(s)$ tal como se describió en la sección 2.2.3, eligiendo los polinomios que componen los interactores con raíces $\alpha = -1$. Así,

$$\xi_r(s) = \xi_l(s) = \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & (s+1)^2 \end{bmatrix}. \quad (2.92)$$

Si tomamos $\xi_r(s)$ para realizar el diseño obtenemos

$$\Lambda_r^{-1}(s) = [P(s)\xi_r(s)]^{-1} = \frac{s+2}{s-1} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \\ s+1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.93)$$

que es una matriz de transferencia inestable, tal como se esperaba. A partir de la expresión de $\Lambda_r^{-1}(s)$ se podría postular directamente en el dominio de Laplace un compensador $D_z(s)$ que la estabilice. Sin embargo, realizaremos el cálculo del compensador en el espacio de estados tal como se describió anteriormente para facilitar la interpretación de $D_z(s)$ en el dominio del tiempo. $\Lambda_r^{-1}(s)$ tiene la siguiente realización en el espacio de estados

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -0,6873 & 0,6254 \\ 0,8436 & 0,6873 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -0,7491 & 0,6254 \\ -0,6254 & 1,687 \end{bmatrix} \tilde{u}, \quad (2.94)$$

$$\bar{u} = \begin{bmatrix} -1,5 & -3 \\ -0,2165 & 1,858 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tilde{u}. \quad (2.95)$$

Así, el subsistema con entrada \tilde{u}_1 (subsistema 1) tiene una realización mínima de la forma (2.85)-(2.86) con las siguientes matrices:

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} -0,6873 & 0,6254 \\ 0,8436 & 0,6873 \end{bmatrix}, & B_1 &= \begin{bmatrix} -0,7491 \\ -0,6254 \end{bmatrix}, \\ C_1 &= \begin{bmatrix} -1,5 & -3 \\ -0,2165 & 1,858 \end{bmatrix}, & D_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.96)$$

mientras que las matrices correspondientes a la descripción en el espacio de estados del subsistema con entrada \tilde{u}_2 (subsistema 2) son

$$\begin{aligned} A_2 &= 1, & B_2 &= 1,799, \\ C_2 &= \begin{bmatrix} -3,334 \\ 1,667 \end{bmatrix}, & D_2 &= \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.97)$$

Ahora se estabilizan ambos subsistemas por realimentación de estados. Para ello, el cálculo de las ganancias K_1 y K_2 se puede efectuar con cualquier método de asignación de raíces. Como los autovalores del subsistema 1 son $(\lambda_1, \lambda_2) = (1, -1)$, se escoge $K_1 = [-5,5 \ -11]$ para llevarlos a $(\lambda'_1, \lambda'_2) = (-10, -1)$. El subsistema 2 tiene un único autovalor $\lambda = 1$, que se lleva a $\lambda' = -1$ con $K_2 = 1,11$.

De esta manera, el compensador $D_z(s)$ en (2.87) resulta

$$D_z(s) = \begin{bmatrix} \frac{s-1}{s+10} & 0 \\ 0 & \frac{s-1}{s+1} \end{bmatrix}. \quad (2.98)$$

Resta entonces elegir $D_Q(s) = \text{diag}(t_1(s), t_2(s))$ para la respuesta deseada a lazo cerrado. Las transferencias $t_i(s)$ deberán tener grado relativo igual al grado de las columnas del interactor en (2.92). A su vez, para tener error de estado estacionario nulo la ganancia en continua de $t_i(s)$ debe ser tal que $T(0) = I_2$. Suponiendo que se desea fijar los polos de lazo cerrado en $s = -1$, se toma

$$D_Q(s) = \begin{bmatrix} \frac{-(s+10)}{s^2+2s+1} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{s^2+2s+1} \end{bmatrix}. \quad (2.99)$$

Por lo tanto, el controlador IMC que logra el desacoplamiento del sistema con la dinámica deseada es

$$Q(s) = \frac{s+2}{s+1} \begin{bmatrix} -1 & \frac{2}{s+1} \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad (2.100)$$

y la matriz de transferencia del lazo cerrado

$$T(s) = \begin{bmatrix} \frac{-s+1}{s^2+2s+1} & 0 \\ 0 & \frac{-s+1}{s^3+3s^2+3s+1} \end{bmatrix}. \quad (2.101)$$

Como puede observarse, si bien la sensibilidad complementaria es diagonal como se buscaba, la misma tiene un cero de NMF en $s = 1$ en cada canal.

La respuesta del sistema con el controlador $Q(s)$ para referencias cuadradas de frecuencias $1/60$ y $1/40$ [unidades de tiempo]⁻¹ se muestra en la Figura 2.8. En ella se verifica el desacoplamiento dinámico del sistema de NMF, y puede apreciarse cómo el cero en el SPD afecta ambos canales con respuestas inversas, que como se mencionó anteriormente es una limitación inherente al desacoplamiento dinámico.

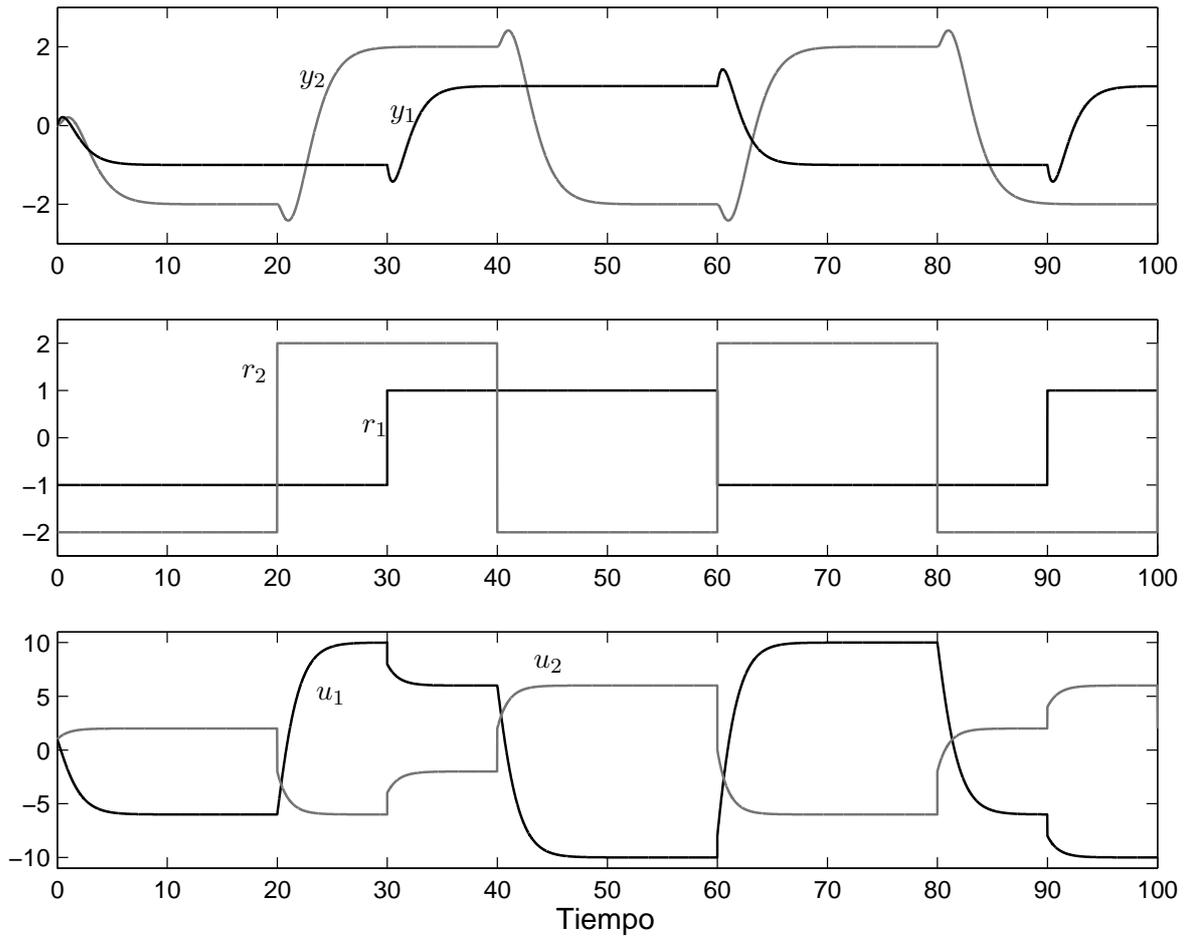


Figura 2.8: Variables controladas (y_i), señales de referencia (r_i) y acciones de control (u_i) del sistema de NMF con el controlador (2.100).

2.3.3. Sistemas inestables

Cuando el sistema multivariable a desacoplar es inestable a lazo abierto, no podrá utilizarse la parametrización afín presentada en la sección 2.2.1. En su lugar, existen estrategias de dos grados de libertad basadas en la parametrización de sistemas multivariables no necesariamente estables, o en el prefiltrado de la señal de referencia (Lin y Hsieh, 1991; Lin, 1997; Goodwin *et al.*, 1997). Aquí presentaremos sólo esta última, ya que resulta inmediata a partir de las estrategias vistas en las secciones 2.3.1 y 2.3.2, y es también más fácil de implementar que las técnicas basadas en la parametrización de sistemas no necesariamente estables.

La principal limitación del desacoplamiento por prefiltrado de la referencia es que con esta estrategia se logra sólo un desacoplamiento desde las señales de referencia a las variables controladas (pero no desde las perturbaciones hacia la salida).

Esta metodología consiste simplemente en estabilizar en primer lugar el sistema inestable a lazo abierto con un controlador $C(s)$ adecuado, e introducir luego una precompensación de la señal de entrada al lazo de control que obtenga el desacoplamiento entrada-salida del sistema estabilizado. Esta idea básica se representa en la Figura 2.9.

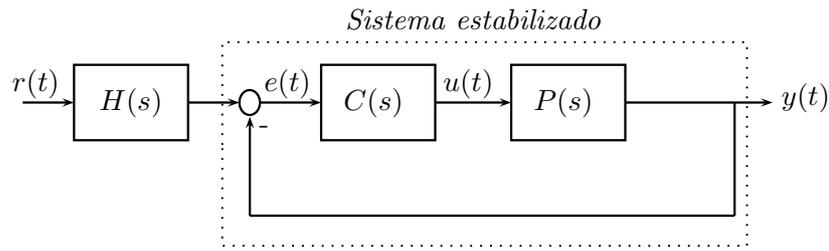


Figura 2.9: Prefiltrado del vector de referencias para el desacoplamiento de sistemas inestables

Suponiendo que la planta es representada por una matriz de transferencia $P(s)$, la transferencia a lazo cerrado será:

$$T(s) = [I + P(s)C(s)]^{-1} P(s)C(s)H(s). \quad (2.102)$$

Para obtener el desacoplamiento dinámico del sistema, se deberá elegir $H(s)$ tal como se explicó para el diseño de $Q(s)$ en el caso de sistemas estables. Esto es, $H(s)$ debe ser un precompensador diagonalizante por derecha de la matriz de transferencia estable $[I + P(s)C(s)]^{-1}P(s)C(s)$.

Comentario 2.6 Si bien en la Figura 2.9 se muestra una configuración a lazo abierto de la compensación $H(s)$, la misma puede obviamente implementarse como una estructura IMC a lazo cerrado.

2.4. Limitaciones de performance debidas a características de no-mínima fase

2.4.1. Costos del desacoplamiento diagonal

En la sección 2.3.2 se verificó que la presencia de ceros multivariantes en el SPD dificulta el desacoplamiento dinámico de un proceso determinado. A su vez, la matriz de transferencia resultante en (2.90) sugiere que un único cero en el SPD puede influir en diversos canales del lazo cerrado cuando se desacopla dinámicamente al sistema. Veamos ahora en detalle de qué depende este esparcimiento indeseado de los ceros de NMF.

Considérese que el modelo nominal de una planta, $P(s)$, tiene un cero de NMF situado en $s = z_0$, $z_0 > 0$, con dirección $h^T = [h_1 \ h_2 \ \dots \ h_m]$. Entonces,

$$h^T P(z_0) = 0 \in \mathbb{R}^m. \quad (2.103)$$

Supóngase ahora que se diseña un controlador $C(s)$ que logra el desacoplamiento dinámico del sistema. Luego, tanto la sensibilidad complementaria $T(s)$ como la sensibilidad $S(s) = I - T(s)$ serán matrices diagonales. Esto significa que la matriz de transferencia de lazo abierto

$$L(s) \triangleq P(s)C(s) \quad (2.104)$$

será también diagonal. Es decir,

$$L(s) = \text{diag}(l_{11}(s), l_{22}(s), \dots, l_{mm}(s)), \quad (2.105)$$

$$S(s) = [I + L(s)]^{-1} = \text{diag}(s_{11}(s), s_{22}(s), \dots, s_{mm}(s)), \quad (2.106)$$

$$T(s) = L(s) [I + L(s)]^{-1} = \text{diag}(t_{11}(s), t_{22}(s), \dots, t_{mm}(s)). \quad (2.107)$$

De acuerdo a (2.103) y a la definición de $L(s)$ en (2.104) debe cumplirse

$$h^T L(z_0) = [h_1 l_{11}(z_0) \ h_2 l_{22}(z_0) \ \dots \ h_m l_{mm}(z_0)] = 0 \in \mathbb{R}^m. \quad (2.108)$$

O sea, que $h_i l_{ii}(z_0) = 0$, para $i = 1, \dots, m$. Esto implica que $l_{ii}(z_0) = 0$ para todos los valores de i en que la correspondiente componente h_i es no-nula.

Siguiendo el mismo razonamiento, de (2.107) se concluye que las transferencias de cada canal del sistema desacoplado $t_{ii}(s)$ correspondientes a componentes no-nulas de h deberán también tener un cero en $s = z_0$. Es decir, que los ceros en el SPD necesariamente se esparcirán al desacoplar el sistema si su dirección de salida tiene más de una componente no-nula. Este esparcimiento se podrá evitar únicamente en el caso particular en que las direcciones asociadas a los ceros de NMF tengan una única componente no-nula (*dirección canónica*).

Ejemplo 2.7 *Considérese nuevamente la planta del ejemplo 2.6*

$$P(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.109)$$

que tiene un cero de NMF en $s = +1$ con multiplicidad geométrica unitaria y dirección de salida $h^T = [1 \ -2]$.

Supóngase que se desea una sensibilidad complementaria diagonal

$$T(s) = P(s)Q(s) = \begin{bmatrix} t_{11}(s) & 0 \\ 0 & t_{22}(s) \end{bmatrix}. \quad (2.110)$$

La inversa del modelo de la planta está dada por

$$P^{-1}(s) = \frac{(s+1)(s+2)}{s-1} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & s+1 \end{bmatrix}, \quad (2.111)$$

lo que verifica la presencia del cero en $s = 1$. Notar que la inversa (2.111) es claramente impropia, y por lo tanto no implementable. Esta es la razón por la cual se ha estudiado la forma de calcular inversas aproximadas propias de $P(s)$. De (2.110) el controlador IMC deberá tener la siguiente forma

$$Q(s) = P^{-1}(s) \begin{bmatrix} t_{11}(s) & 0 \\ 0 & t_{22}(s) \end{bmatrix}. \quad (2.112)$$

Como el controlador $Q(s)$ debe ser estable para la estabilidad interna del sistema, tanto $t_{11}(s)$ como $t_{22}(s)$ deberán anularse en $s = 1$. Por lo tanto, el efecto de NMF aparecerá en ambos canales del lazo cerrado, lo cual concuerda con el análisis previo, ya que las dos componentes de la dirección de salida $h^T = [1 \ -2]$ son no-nulas.

Considérese ahora este otro modelo

$$P'(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} -s+1 & -s+1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.113)$$

que también tiene un cero de NMF en $s = +1$ con multiplicidad geométrica unitaria, pero con dirección de salida $h^T = [1 \ 0]$ (dirección canónica).

En este caso, la inversa de la planta es

$$P'^{-1}(s) = \begin{bmatrix} \frac{(s+1)(s+2)}{s-1} & (s+1)(s+2) \\ \frac{-2(s+1)(s+2)}{s-1} & -(s+1)(s+2) \end{bmatrix}, \quad (2.114)$$

y por lo tanto el controlador IMC deberá ser

$$Q(s) = \begin{bmatrix} \frac{(s+1)(s+2)}{s-1} t_{11}(s) & (s+1)(s+2) t_{22}(s) \\ \frac{-2(s+1)(s+2)}{s-1} t_{11}(s) & -(s+1)(s+2) t_{22}(s) \end{bmatrix}. \quad (2.115)$$

Como puede observarse, para que $Q(s)$ sea estable se requiere solamente que $t_{11}(s)$ tenga un cero en $s = 1$, pero no es necesario que también $t_{22}(s)$ lo tenga. O sea, para la planta con dirección canónica asociada al cero en el SPD la característica de NMF aparece en un solo canal del lazo cerrado.

Además de provocar un esparcimiento de los ceros en el SPD, el desacoplamiento de sistemas de NMF hace más restrictivas las limitaciones fundamentales de diseño de los sistemas multivariables (siempre que las direcciones de los ceros en el SPD no sean canónicas). Las expresiones que cuantifican estos costos del desacoplamiento de sistemas de NMF pueden

encontrarse en (Seron *et al.*, 1997). En el dominio del tiempo constituyen una restricción sobre una integral de la señal de error, mientras que en la frecuencia las limitaciones surgen a partir de la Integral de Poisson. Esta última da lugar a cotas inferiores para la norma- ∞ de la función de sensibilidad del sistema, las cuales resultan más restrictivas para un sistema desacoplado que para uno con interacciones cruzadas.

2.5. Resumen del capítulo

En este capítulo se introdujeron algunos de los conceptos relacionados con los sistemas lineales multivariantes que posteriormente serán empleados en el desarrollo de la tesis. Se presentó la parametrización afín de los controladores que estabilizan internamente el lazo de control, y la ampliamente difundida estrategia de Control por Modelo Interno (IMC). A partir de las propiedades de las matrices interactoras se describió el cálculo de inversas propias aproximadas de sistemas MIMO.

En base a todo lo anterior, se describieron procedimientos de diseño para obtener el desacoplamiento dinámico de sistemas estables de mínima fase, estables de no mínima fase e inestables.

Finalmente, se analizaron los efectos que provocan los ceros del semi-plano derecho en los sistemas multivariantes diagonalmente desacoplados.

CAPÍTULO 3

CONTROL POR MODO DESLIZANTE

En este capítulo se introducen los sistemas de estructura variable y los regímenes deslizantes asociados. Se presentan algunos conceptos fundamentales de la teoría de control por estructura variable (CEV), como el control equivalente, las condiciones de existencia del régimen deslizante y sus propiedades de robustez, los cuales serán aprovechados luego en las estrategias de control propuestas en esta tesis. También se describe la aplicación del modo deslizante a sistemas representados en su forma canónica normal, ya que será de utilidad en los capítulos subsiguientes. Se introducen luego los observadores por modo deslizante, cuya aplicación a un problema concreto ha sido evaluada en un trabajo reciente. Finalmente, se resumen los inconvenientes en la implementación de los controladores por modo deslizante, particularmente aquellos relacionados con el modo de alcance a la superficie, la frecuencia de conmutación y las dinámicas no modeladas.

3.1. Introducción

Un sistema de estructura variable se compone de dos o más subsistemas continuos y una lógica que realiza la conmutación entre ellos en función de los estados del sistema. La acción de control que resulta de esta ley de conmutación es una función discontinua de los estados. Un modo de operación particular se obtiene cuando las conmutaciones ocurren a frecuencia muy elevada, restringiendo la trayectoria de los estados del sistema a una variedad en el espacio de estados. Este modo de operación es llamado modo o régimen deslizante (MD) y presenta propiedades muy atractivas. Entre otras, es robusto a perturbaciones externas y a incertidumbre en los parámetros, el sistema de lazo cerrado es de orden reducido, y su dinámica es gobernada mediante el diseño de la función de conmutación.

El interés en la teoría de control por estructura variable creció en todo el mundo hacia fines de la década del '70 (Utkin, 1977), produciéndose desde entonces grandes avances teóricos. Existe una gran cantidad de trabajos que incluyen revisiones generales sobre el control de estructura variable (Utkin, 1992; Hung *et al.*, 1993; Edwards y Spurgeon, 1998; Utkin *et al.*,

1999; Young *et al.*, 1999; Perruquetti y Barbot, 2002; Edwards *et al.*, 2006). Además, debido a las interesantes propiedades del MD y al desarrollo tecnológico que permitió implementar las propuestas teóricas, surgieron numerosas aplicaciones prácticas (Herrmann *et al.*, 2003; Chen y Peng, 2005, 2006; Picó *et al.*, 2005; Lai *et al.*, 2006; Hung *et al.*, 2007).

Los principios del control por MD que se introducen en este capítulo serán necesarios para analizar y comprender el desarrollo de las estrategias propuestas en los capítulos siguientes. Dado que estas estrategias tienen la ventaja de poder implementarse mediante el diseño de múltiples lazos SISO de estructura variable, el estudio del CEV se realizará centralmente para sistemas monovariantes. Por otro lado, si bien los métodos propuestos se aplican en esta tesis a sistemas lineales, los mismos no presentan a priori limitaciones para ser implementados en sistemas no-lineales. Por ello, y a fin de describir las herramientas necesarias para realizar la extensión correspondiente, la presentación en este capítulo se realiza en el marco de los sistemas afines en el control, considerándose a los sistemas lineales como un caso particular.

3.2. Descripción del modo deslizante

Considérese el siguiente sistema continuo:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u, \\ y &= h(x),\end{aligned}\tag{3.1}$$

donde $x \in X \subset \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $u \in \mathbb{R}$ es la acción de control (posiblemente discontinua), $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dos campos vectoriales en \mathcal{C}^n (infinitamente derivables) y $h(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ campo escalar también en \mathcal{C}^n , todos definidos en X , con $g(x) \neq 0$, $\forall x \in X$. Estos sistemas reciben el nombre de sistemas afines en el control o sistemas lineales analíticos (y obviamente incluyen a los sistemas lineales convencionales).

Si se define la función de conmutación $s(x)$ como una función suave $s : X \rightarrow \mathbb{R}$, cuyo gradiente ∇s es no nulo en X , entonces el conjunto:

$$S = \{x \in X : s(x) = 0\},\tag{3.2}$$

define una variedad regular en X de dimensión $n - 1$, llamada variedad de deslizamiento o superficie de conmutación.

Se puede plantear una ley de control de estructura variable imponiendo que la acción de control u tome un valor de entre dos posibles, según sea el signo de la función de conmutación $s(x)$:

$$u = \begin{cases} u^+(x) & \text{si } s(x) > 0 \\ u^-(x) & \text{si } s(x) < 0 \end{cases} \quad u^+(x) \neq u^-(x).\tag{3.3}$$

Los niveles superior e inferior de u son funciones suaves de x y, sin pérdida de generalidad, se puede aceptar que satisfacen $u^+(x) > u^-(x)$. Nótese que si $u^+ > u^-$ para algún $x \in X$, esta desigualdad valdrá $\forall x \in X$ ya que u^+ y u^- son ambas funciones suaves y nunca se igualan.

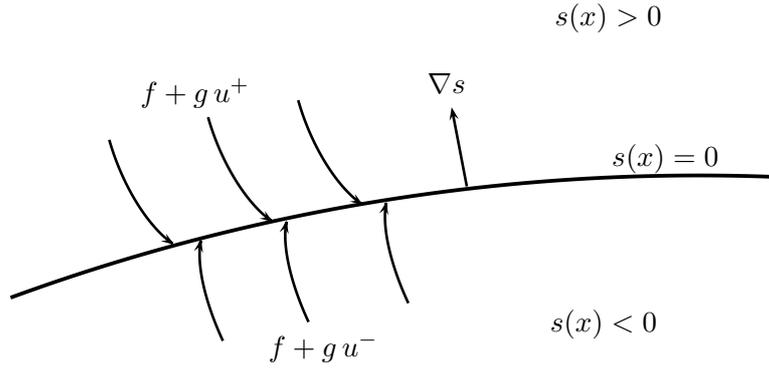


Figura 3.1: Establecimiento de un régimen deslizante sobre la superficie $s(x) = 0$

Se dice que existe un régimen deslizante sobre S cuando, como resultado de la ley de conmutación (3.3), el sistema alcanza la superficie S y se mantiene localmente en su entorno. Para la existencia de un régimen deslizante sobre S debe cumplirse que los campos vectoriales controlados de los dos subsistemas continuos, $(f + g u^+)$ y $(f + g u^-)$, apunten localmente hacia la variedad S . Esta situación se representa geoméricamente en la Figura 3.1. En la siguiente sección se verán las condiciones necesarias para que esto se cumpla.

3.3. Condición necesaria para existencia del modo deslizante (Condición de transversalidad)

El objetivo de esta sección es determinar qué condiciones deben cumplirse para el establecimiento de un modo deslizante sobre la superficie definida por $s(x) = 0$. Se ha mencionado que para ello los campos vectoriales de los dos subsistemas continuos conmutados por la ley (3.3) deben apuntar hacia la superficie de deslizamiento en el entorno de S . Veamos ahora qué implica esto matemáticamente.

Supóngase que como resultado de la ley de control (3.3), la función de conmutación cumple con las siguientes desigualdades localmente en el entorno de S :

$$\begin{cases} \dot{s}(x) < 0 & \text{si } s(x) > 0 \\ \dot{s}(x) > 0 & \text{si } s(x) < 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

Como consecuencia de (3.4), el sistema alcanza la variedad de deslizamiento S y de ahí en adelante queda confinado en el entorno de S . Se dice entonces que existe un régimen deslizante sobre S .

Debido a que muchos conceptos relacionados con el modo deslizante pueden explicarse mediante su interpretación geométrica, en adelante se hará uso de la *derivada direccional* o *derivada de Lie*:

$$L_f h(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R},$$

que denota la derivada de un campo escalar $h(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ en la dirección de un campo vectorial $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$:

$$L_f h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} f.$$

Nótese que al ser $L_f h(x)$ una función escalar, la derivada direccional se puede aplicar de manera recursiva:

$$L_f^k h(x) = \frac{\partial}{\partial x} \left(L_f^{k-1} h(x) \right) f(x).$$

De este modo se consigue una notación compacta para las derivadas de funciones escalares en dirección de campos vectoriales, ya sea en la dirección de un solo campo vectorial o de varios campos vectoriales. Por ejemplo, para dos campos vectoriales $f(x)$ y $g(x)$:

$$L_g L_f h(x) = \frac{\partial}{\partial x} (L_f h(x)) g(x)$$

Como la derivada de Lie es un operador lineal, derivando la función de conmutación $s(x)$ se tiene

$$\dot{s}(x) = L_{f+gu} s = L_f s + L_g s u. \quad (3.5)$$

La expresión (3.4) se puede escribir entonces como:

$$\begin{cases} \lim_{s \rightarrow +0} L_{f+gu^+} s < 0 \\ \lim_{s \rightarrow -0} L_{f+gu^-} s > 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

Esta última ecuación implica que la variación de la función escalar $s(x)$ en la dirección del campo controlado siempre se opone al signo de $s(x)$, garantizando el cruce de S a ambos lados de la superficie. Esto mismo se puede escribir de manera más compacta como:

$$\lim_{s(x) \rightarrow 0} s(x) \cdot \dot{s}(x) < 0. \quad (3.7)$$

Gracias a las propiedades de linealidad de la derivada de Lie, la ecuación (3.6) se puede expresar de manera equivalente como:

$$\dot{s}(x) = \begin{cases} L_f s + L_g s u^+ < 0 & \text{si } s > 0 \\ L_f s + L_g s u^- > 0 & \text{si } s < 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

Por lo tanto, para que se establezca el modo deslizante sobre $s(x) = 0$ se ha de satisfacer:

$$L_g s = \frac{\partial s}{\partial x} g \neq 0, \quad (3.9)$$

localmente en S . La condición anterior es una condición necesaria para el establecimiento del MD, y se la conoce como *condición de transversalidad*.

Comentario 3.1 *Suponiendo, sin pérdida de generalidad, que $u^+(x) > u^-(x)$, la condición necesaria para la existencia de un régimen deslizante sobre S es*

$$L_g s = \frac{\partial s}{\partial x} g < 0, \quad (3.10)$$

en el entorno de S .

Su demostración es inmediata a partir de (3.8): restando las dos expresiones en esta ecuación para $\dot{s}(x)$ se tiene que deberá cumplirse

$$(u^+(x) - u^-(x))L_g s < 0.$$

Como se supuso $u^+(x) - u^-(x) > 0$, la condición se reduce a $L_g s < 0$.

Como caso particular, analizaremos algunas propiedades del control por modo deslizante en sistemas lineales convencionales con la estructura descrita en la Figura 3.2. La representación del sistema es en este caso

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu, \\ y &= c^\top x, \end{aligned} \quad (3.11)$$

donde la acción de control u está determinada por (3.3). Luego, las funciones definidas para el sistema afín (3.1) están dadas en el sistema (3.11) por

$$f(x) = Ax, \quad (3.12)$$

$$g(x) = b, \quad (3.13)$$

$$h(x) = c^\top x. \quad (3.14)$$

Considérese la siguiente ley de conmutación:

$$s(x) = k_r r - k^\top x, \quad (3.15)$$

donde la constante k_r se escoge de forma tal que el valor en régimen estacionario de la salida sea igual al set-point r , y las constantes de realimentación k^\top determinan la dinámica lineal durante el régimen deslizante.

La trayectoria del estado debe tender a la superficie $s(x) = 0$ desde ambos lados de la misma. Así, cuando $s(x) > 0$, $s(x)$ debe ser decreciente. Lo mismo es cierto en sentido inverso. Esto lo garantiza la *condición de transversalidad*, que de acuerdo a (3.13) y (3.15) aquí viene dada por:

$$L_g s = \frac{\partial s}{\partial x} g = k^\top b \neq 0. \quad (3.16)$$

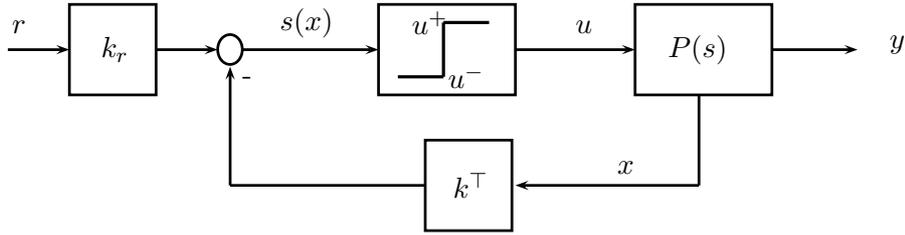


Figura 3.2: Esquema convencional de control por modo deslizante

En efecto, para el sistema (3.11) y la función de conmutación (3.15) la condición (3.8) resulta:

$$\lim_{s(x) \rightarrow 0^+} \dot{s}(x) < 0 \Rightarrow \dot{s}(x, u^+) = -k^\top A x - k^\top b u^+ < 0 \quad (3.17)$$

$$\lim_{s(x) \rightarrow 0^-} \dot{s}(x) > 0 \Rightarrow \dot{s}(x, u^-) = -k^\top A x - k^\top b u^- > 0 \quad (3.18)$$

En las dos desigualdades, los dos primeros sumandos son iguales inmediatamente a ambos lados de la superficie, por lo que es el último término el único que puede conseguir cambiar el signo de la expresión.

Si el sistema es multivariable con n estados y m entradas, se han de definir m superficies. En este caso se tendrá un producto de matrices $K B$, que deberá ser no singular para el establecimiento de regímenes deslizantes.

Comentario 3.2 Si para el sistema (3.11) se supusiera también que $u^+ > u^-$, la condición necesaria para el establecimiento del régimen deslizante podría escribirse como $k^\top b > 0$ (lo que resulta de hacer la diferencia entre las condiciones de alcance (3.17) y (3.18)). Nótese que si $k^\top b < 0$ sólo basta con elegir $u^+ < u^-$, o bien se puede definir una ley de conmutación alternativa $s^*(x) = -s(x)$.

Considerando nulo al set-point r , la función de transferencia del sistema tomando como salida la función de deslizamiento es:

$$\frac{S}{U} = -k^\top (sI - A)^{-1} b. \quad (3.19)$$

Por descomposición en serie de Taylor se puede escribir la función de transferencia anterior como:

$$\frac{S}{U} = (-k^\top) b s^{-1} + (-k^\top) A b s^{-2} + \dots + (-k^\top) A^m b s^{-(m+1)} + \dots \quad (3.20)$$

Por lo tanto, la condición de transversalidad impone que el primer término de la descomposición en serie de Taylor ($k^\top b$ es el primer parámetro de Markov) ha de ser no nulo. Esto se

traduce en que la función de transferencia entre la acción de control discontinua y la función de deslizamiento ha de tener grado relativo unitario (Edwards y Spurgeon, 1998).

De todas formas, la condición de transversalidad es necesaria pero no suficiente para garantizar la existencia de modo deslizante. En la sección 3.5 veremos una condición necesaria y suficiente.

3.4. Método del control equivalente

El sistema operando en régimen deslizante conmuta a una frecuencia idealmente infinita, es decir, es discontinuo en todo instante de tiempo. Esto impide obtener una solución analítica de la ecuación de estado. Una manera de obtener la dinámica del modo deslizante consiste en encontrar un sistema continuo equivalente al modo deslizante.

Se define con este fin el *modo de deslizamiento ideal* como el régimen de operación ideal para el cual la variedad S es un invariante del sistema. En estas condiciones, una vez que la trayectoria del sistema alcanza la superficie, se desliza exactamente por ella. La condición de invarianza de la variedad S está dada por:

$$\begin{cases} s(x) = 0 \\ \dot{s}(x) = L_f s + L_g s u_{eq} = 0 \end{cases} \quad (3.21)$$

La segunda ecuación de (3.21) indica que la trayectoria permanece sobre la superficie, mientras que $u_{eq}(x)$ representa una ley de control suave para la cual S es una variedad invariante local del sistema (3.1). La función $u_{eq}(x)$ se conoce como *control equivalente*, y puede ser despejada a partir de (3.21), resultando:

$$u_{eq}(x) = -\frac{L_f s}{L_g s}. \quad (3.22)$$

Como puede verse, la condición de transversalidad (3.9) es condición necesaria y suficiente para que el control equivalente esté bien definido. Por ello, suele decirse también que la condición necesaria para la existencia de un modo deslizante local en S es que la acción de control equivalente $u_{eq}(x)$ esté bien definida.

Para el sistema (3.11) y la superficie de conmutación planteada en (3.15), la condición de invarianza viene dada por:

$$s(x) = k_r r - k^\top x = 0 \quad (3.23)$$

$$\dot{s}(x) = -k^\top (Ax + b u_{eq}) = 0. \quad (3.24)$$

Calculando las derivadas en (3.22) o despejando de (3.24) se obtiene que:

$$u_{eq} = -\frac{L_f s}{L_g s} = -\left(\frac{\partial s}{\partial x} b\right)^{-1} \frac{\partial s}{\partial x} A x = -(k^\top b)^{-1} k^\top A x. \quad (3.25)$$

Nuevamente, se observa que la condición de transversalidad ($k^\top b \neq 0$) debe verificarse para que la acción de control equivalente al modo deslizante esté bien definida.

Si bien la u_{eq} ha sido calculada a partir de $\dot{s}(x) = 0$ ($s(x) = cte$), debe tenerse siempre presente que sólo tiene sentido sobre la superficie $s(x) = 0$.

3.5. Condición necesaria y suficiente para la existencia del modo deslizante

En la Sección 3.3 se estableció la condición sobre el signo de la derivada de la ley de conmutación en cada una de las zonas $s(x) > 0$ y $s(x) < 0$ para que existiera el modo deslizante (ecuación (3.4)). Por definición, la acción de control equivalente es el control continuo necesario para mantener la trayectoria del sistema sobre la superficie $s(x) = 0$. En consecuencia, la derivada de la ley de conmutación $\dot{s}(x)$ deberá ser también nula a lo largo de dicha trayectoria:

$$\dot{s}(x) = L_f s + L_g s u_{eq} = 0, \quad (3.26)$$

lo que ya fue establecido en las condiciones de invarianza (3.21) de la variedad S .

El siguiente teorema define una condición necesaria y suficiente para la existencia del modo deslizante en términos del control equivalente $u_{eq}(x)$ (Utkin *et al.*, 1999).

Teorema 3.1. *Sea $u^+ > u^-$ y $L_g s < 0$ (véase comentario 3.1), una condición necesaria y suficiente para la existencia local de un régimen deslizante sobre S es que para $x \in S$, se cumpla:*

$$u^-(x) < u_{eq}(x) < u^+(x). \quad (3.27)$$

Demostración:

\Leftarrow) Primero demostremos que (3.27) es condición necesaria para la existencia del MD:

De la condición (3.8), para $s > 0$:

$$L_f s + L_g s u^+ < 0 \quad \text{si } s > 0.$$

Además, de (3.26)

$$\dot{s}(x) = L_f s + L_g s u_{eq} = 0 \quad \text{para } s = 0.$$

Restando ambas ecuaciones se tiene que $(u^+ - u_{eq})L_g s < 0$, lo que implica que $u_{eq} < u^+$.

En forma similar, si a la condición (3.8) para $s < 0$:

$$L_f s + L_g s u^- > 0 \quad \text{si } s < 0,$$

se le resta (3.26) se llega a que $u_{eq} > u^-$.

\Rightarrow) Para probar que (3.27) es condición suficiente, supóngase una función $u_{eq}(x)$ suave que satisface (3.22) y (3.27). Se define una señal auxiliar $v_{eq}(x)$:

$$v_{eq}(x) = \frac{u_{eq}(x) - u^-(x)}{u^+(x) - u^-(x)}. \quad (3.28)$$

Notar que $v_{eq}(x)$ satisface

$$L_{f+g u_{eq}} s = v_{eq} L_{f+g u^+} s + (1 - v_{eq}) L_{f+g u^-} s = 0. \quad (3.29)$$

De (3.27) y (3.28) se obtiene

$$\begin{cases} 0 < v_{eq}(x) < 1 \\ 0 < 1 - v_{eq}(x) < 1 \end{cases} \quad (3.30)$$

Luego, necesariamente,

$$\text{sign}(L_{f+g u^+} s) \neq \text{sign}(L_{f+g u^-} s). \quad (3.31)$$

Para $u^+ > u^-$ y $L_g s < 0$, la condición (3.31) puede escribirse como:

$$L_{f+g u^+} s < 0 < L_{f+g u^-} s. \quad (3.32)$$

De esta manera, se verifica (3.6), por lo que el régimen deslizante sobre S existe. \square

Dicho de otra forma, el control equivalente $u_{eq}(x)$ es una especie de promedio entre los límites de la acción de control $u^+(x)$ y $u^-(x)$. La acción de control discontinua puede ser interpretada como la suma de una componente de baja frecuencia ($u_{eq}(x)$) y otra de alta frecuencia que es filtrada por el sistema.

Si $u_{eq}(x) > u^+(x)$ no se cumplirá $\lim_{s \rightarrow 0^+} \dot{s} < 0$, lo cual significa que no se podrá pasar al otro lado de la superficie. Ocurre lo mismo si $u_{eq}(x) < u^-(x)$. En ambos casos el sistema se hallará fuera del dominio de deslizamiento, y se perderá el régimen deslizante.

Comentario 3.3 Obsérvese que la condición necesaria y suficiente (3.27) puede independizarse de la desigualdad existente entre $u^+(x)$ y $u^-(x)$ si se la reformula de la siguiente manera:

$$\min\{u^-(x), u^+(x)\} < u_{eq}(x) < \max\{u^-(x), u^+(x)\}. \quad (3.33)$$

3.6. Dinámica del modo deslizante ideal

Reemplazando en la ecuación (3.1) a u por la expresión de u_{eq} en (3.22), se obtiene:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u_{eq} = f(x) - \frac{L_f s}{L_g s} g(x). \quad (3.34)$$

Sustituyendo la derivada de Lie y operando en (3.34):

$$\dot{x} = \left[I - g \left(\frac{\partial s}{\partial x} g \right)^{-1} \frac{\partial s}{\partial x} \right] f(x) = F(x) f(x). \quad (3.35)$$

La expresión anterior describe la dinámica durante el *modo de deslizamiento ideal*.

Hemos visto que la acción de control continua u_{eq} hace que los estados del sistema evolucionen sobre la superficie de deslizamiento S . Según esto, la dinámica $Ff = f + gu_{eq}$ resultante al aplicar u_{eq} será tangente a S , es decir normal al gradiente de $s(x)$ (∇s). O sea:

$$F(x) f(x) \in \ker(\nabla s). \quad (3.36)$$

En consecuencia, se puede considerar a $F(x)$ como un operador de proyección que se aplica al vector $f(x)$ y lo proyecta sobre el plano tangente a la superficie S en el punto x .

A continuación veamos en qué dirección $F(x)$ hace esta proyección. Considérese un vector $v(x)$ colineal con $g(x)$ ($v \in \text{span}(g)$) de amplitud arbitraria:

$$v(x) = g(x) \mu(x), \quad \text{con } \mu(x) \in \mathbb{R}. \quad (3.37)$$

Si se aplica a este vector $v(x)$ el operador $F(x)$ resulta

$$F(x)v(x) = \left[I - g \left(\frac{\partial s}{\partial x} g \right)^{-1} \frac{\partial s}{\partial x} \right] g(x) \mu(x) = 0. \quad (3.38)$$

El hecho de que la expresión (3.38) se anule se puede interpretar como que el operador $F(x)$ proyecta cualquier vector en la dirección del campo controlado $g(x)$, es decir, a lo largo de $\text{span}(g)$.

En la Figura 3.3 se aprecia este hecho. Obsérvese que $F(x)f(x)$ es la proyección de $f(x)$ sobre S en la dirección de g , y que, por lo tanto, el valor de u_{eq} es tal que $F(x)f(x)$ es tangente a S . Esta restricción en el espacio de estados implica que la dinámica del sistema pierda dimensión, ya que establece que un estado sea dependiente de los restantes $n - 1$ estados.

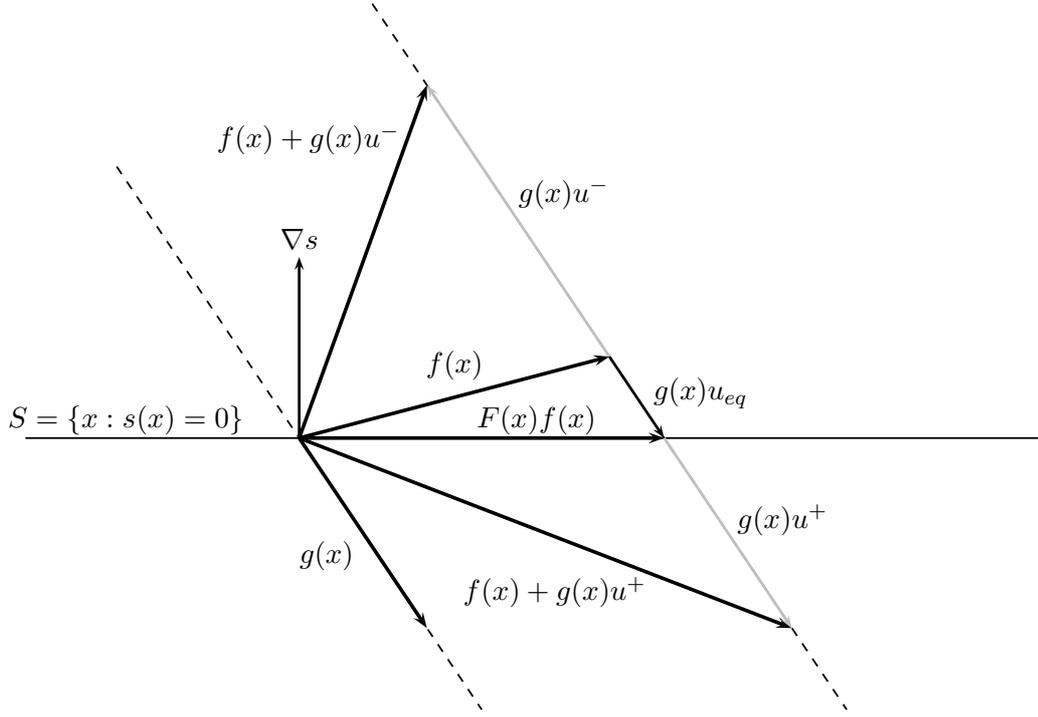


Figura 3.3: Dinámica del modo deslizante ideal. Interpretación geométrica del operador F

La dinámica reducida durante el MD puede obtenerse para el sistema (3.11) sustituyendo la acción de control equivalente determinada por (3.25) en la ecuación de estado correspondiente, resultando:

$$\dot{x} = Ax + b \left[-(k^\top b)^{-1} k^\top Ax \right]. \quad (3.39)$$

Reordenando queda:

$$\dot{x} = F(x) f(x) = \underbrace{\left(I - b(k^\top b)^{-1} k^\top \right)}_{A_{MD}} Ax, \quad (3.40)$$

que también se obtiene de reemplazar (3.12), (3.13) y (3.15) en (3.35). El sistema de ecuaciones de estado (3.40) describe la dinámica en modo deslizante de manera redundante. En efecto, una de las ecuaciones es linealmente dependiente de las restantes $n - 1$ ecuaciones debido a que el estado x del sistema cumple la restricción $s(x) = 0$. La matriz A_{MD} tiene entonces un autovalor en el origen que debe ser atribuido a esta redundancia, y que no implica que el régimen deslizante sea inestable.

En el caso de un sistema multivariable con m entradas, si se definieran m funciones de deslizamiento de la forma (3.15), la expresión resultante sería redundante en m estados, y la matriz A_{MD} tendría m autovalores en el origen atribuibles a esta redundancia.

Comentario 3.4 En la Figura 3.3 se pueden observar también las implicancias geométricas de la condición de transversalidad (3.9). La misma establece que el vector campo $g(x)$ no puede ser tangente a la variedad de deslizamiento S ($g \notin \ker(\nabla s)$).

3.7. Propiedades de robustez del modo deslizante

Supóngase que el sistema (3.1) es afectado por perturbaciones tales que:

$$\dot{x} = (f(x) + \Delta f(x)) + g(x)u + \delta = f(x) + g(x)u + d, \quad (3.41)$$

donde $d \in \mathbb{R}^n$ es un vector de perturbaciones que puede representar incertidumbres paramétricas ($\Delta f(x)$) o perturbaciones no estructuradas externas (δ).

En el caso más general, el vector de perturbaciones puede ser descompuesto unívocamente en dos vectores:

$$d = g(x)\mu(x) + \eta(x), \quad (3.42)$$

donde $\mu(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función escalar suave, siendo por tanto la componente $g(x)\mu(x)$ colineal a $g(x)$; mientras que la componente $\eta(x)$ es un vector perteneciente a la variedad tangente a la superficie S . Esta descomposición se puede llevar a cabo ya que $g(x)$ no pertenece a la variedad tangente a la superficie, de acuerdo con la condición de transversalidad del modo deslizante (3.9).

Efectos sobre el dominio de existencia del régimen deslizante:

Planteando a partir de (3.41) las condiciones de invariancia de S ($s(x) = 0, \dot{s}(x) = 0$) para obtener el control equivalente:

$$\dot{s}(x) = L_f s + L_g s u_{eq} + L_d s = L_f s + L_g s u_{eq} + L_{g\mu+\eta} s = 0. \quad (3.43)$$

Si se aplican las propiedades de la derivada direccional a la expresión (3.43):

$$\dot{s}(x) = L_f s + L_g s u_{eq} + L_\eta s + L_g s \mu = 0. \quad (3.44)$$

Luego, el control equivalente estará dado por

$$u_{eq}(x) = -\frac{L_f s + L_\eta s + L_g s \mu}{L_g s}. \quad (3.45)$$

Como η por definición es tangente a la superficie S , $L_\eta s = 0$. Entonces la acción de control equivalente quedará como:

$$u_{eq}(x) = -\frac{L_f s}{L_g s} - \mu. \quad (3.46)$$

Llamando u_{eq}^* a la acción de control equivalente del sistema sin perturbación, se puede escribir la ecuación (3.46) en función de u_{eq}^* como:

$$u_{eq}(x) = u_{eq}^* - \mu. \quad (3.47)$$

A partir de esta acción de control equivalente, y según la ecuación (3.27), la condición necesaria y suficiente para la existencia del modo deslizante queda:

$$u^- < u_{eq}^* - \mu < u^+, \quad (3.48)$$

$$u^- + \mu < u_{eq}^* < u^+ + \mu. \quad (3.49)$$

Se concluye así que el dominio de existencia del modo deslizante no se ve afectado por la componente de la perturbación tangente a la superficie ($\eta(x)$), aunque sí es alterado por la componente colineal a $g(x)$ ($g(x)\mu(x)$).

Efectos en la dinámica de modo deslizante:

Para estudiar los efectos de la perturbación sobre la dinámica del sistema en modo deslizante, se sustituye la acción de control equivalente en la ecuación de estado del sistema perturbado resultante de (3.41) y (3.42):

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u_{eq}(x) + g(x)\mu(x) + \eta(x). \quad (3.50)$$

Aplicando el resultado de la ecuación (3.47):

$$\dot{x} = f(x) + g(x)(u_{eq}^*(x) - \mu(x)) + g(x)\mu(x) + \eta(x). \quad (3.51)$$

Y por lo tanto:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u_{eq}^*(x) + \eta(x) \\ &= F(x)f(x) + \eta(x). \end{aligned}$$

O sea, la dinámica del modo deslizante es insensible a la componente $g(x)\mu(x)$ de la perturbación, pero se ve afectada por la componente $\eta(x)$ tangente a la superficie S .

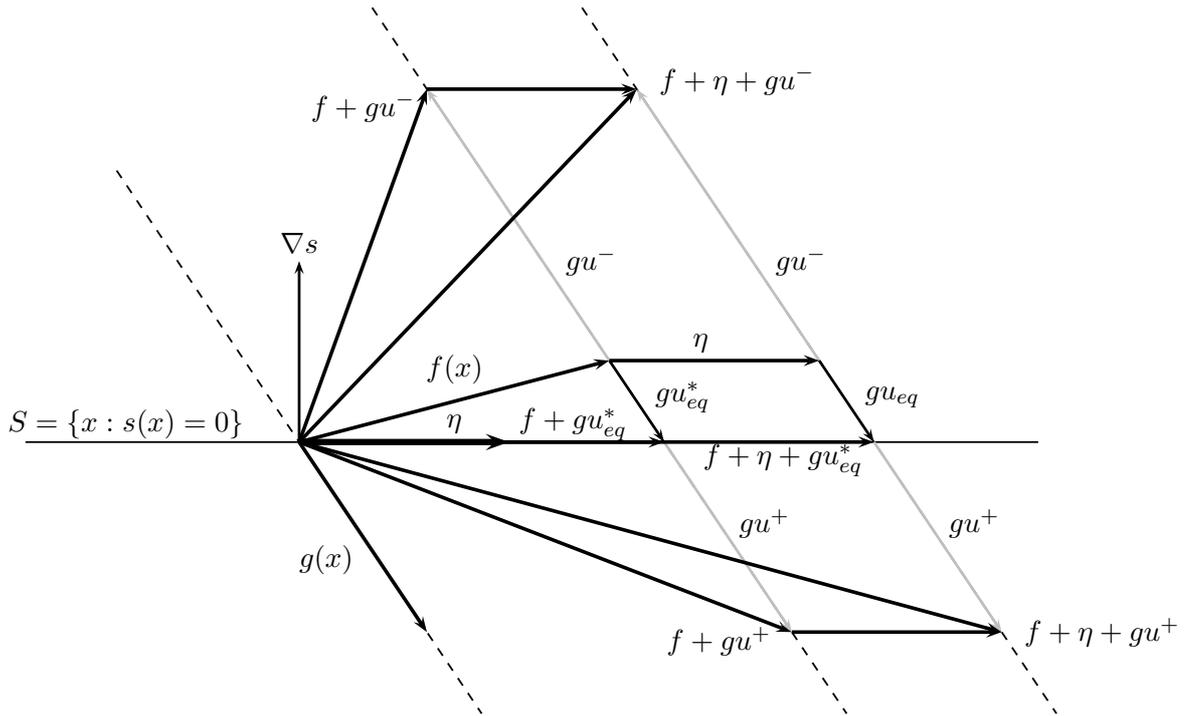


Figura 3.4: Interpretación geométrica del efecto de una perturbación tangente a S sobre la dinámica en modo deslizante

Propiedad de invariancia fuerte del modo deslizante: Se dice que el modo deslizante presenta una propiedad de invariancia fuerte a la perturbación d , siempre que la dinámica deslizante ideal sea independiente de la perturbación (Sira-Ramírez, 1988). De acuerdo a lo analizado, esto se cumple en los casos en que la perturbación es de la forma:

$$d = g(x) \mu(x). \quad (3.52)$$

Es decir, cuando la perturbación sólo presenta componente colineal al campo de control. Esta condición se conoce como *condición vinculante*.

Propiedad de invariancia débil del modo deslizante: Se dice que el modo deslizante presenta una propiedad de invariancia débil a la perturbación d , cuando no cumple la condición vinculante (3.52).

A modo de resumen, se puede afirmar lo siguiente para cada tipo de componente de la perturbación:

$$\begin{array}{l}
 g\mu \\
 \eta
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 \text{NO afecta a la dinámica del modo deslizante} \\
 \text{SI afecta al dominio de existencia del modo deslizante} \\
 \text{SI afecta a la dinámica del modo deslizante} \\
 \text{NO afecta al dominio de existencia del modo deslizante}
 \end{array} \right.$$

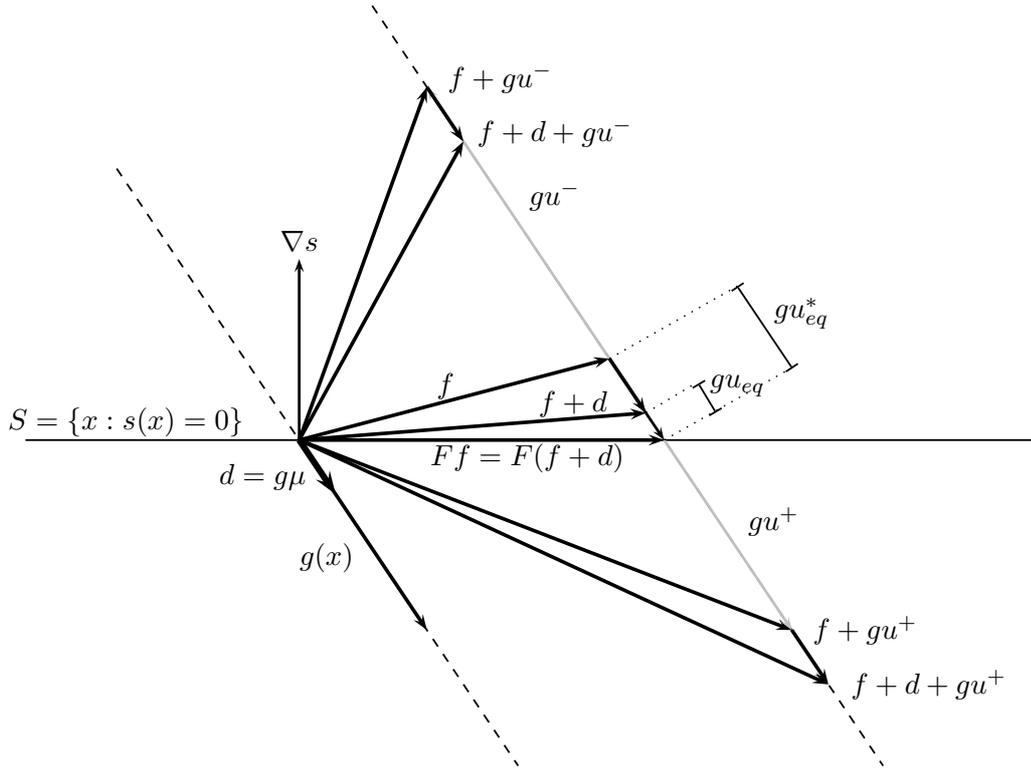


Figura 3.5: Interpretación geométrica del efecto de una perturbación colineal a g sobre la existencia del modo deslizante

Interpretación geométrica del efecto de la perturbación: En la Figura 3.4 se muestra el sistema afectado por una perturbación η tangente a la superficie S . Se observa que el valor de u_{eq} no varía respecto de aquel obtenido sin perturbación, por lo que la condición de existencia no cambia. Sin embargo la dinámica del modo deslizante sí es afectada (el vector $F \cdot (f + \eta) = f + \eta + g u_{eq}^*$ difiere de $F \cdot f = f + g u_{eq}^*$).

En la Figura 3.5 se muestra el sistema afectado por una perturbación d colineal al vector g , y se aprecia el efecto sobre el valor de u_{eq} , lo cual modifica la condición de existencia respecto del sistema no perturbado. Sin embargo, el valor de la proyección $F \cdot (f + d)$ coincide con la de $F \cdot f$, lo que indica la invarianza de la dinámica del régimen deslizante.

A continuación se presenta un ejemplo que verifica los resultados obtenidos en esta sección y grafica la robustez del modo deslizante a los cambios de parámetros en sistemas lineales convencionales. Para ello, se considera en la ecuación (3.41) un vector $d \in \mathbb{R}^n$ de la siguiente forma:

$$d = \Delta f(x) = \Delta x. \quad (3.53)$$

En particular, el siguiente ejemplo evidencia cuáles son los parámetros de la matriz A de la representación en el espacio de estados cuya incertidumbre afecta la dinámica durante el MD, y cuáles son aquellos parámetros cuya variación es perfectamente rechazada por el régimen deslizante. Con fines ilustrativos, se consideran en primer lugar sistemas de dimensión igual a 2, y seguidamente se extiende el análisis a sistemas de dimensión n .

Ejemplo 3.1 Sea un sistema descrito en forma canónica controlable con estados $x = [x_1 \ x_2]^T$ disponibles para su realimentación

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u. \quad (3.54)$$

Se define la siguiente función de conmutación

$$s(x) = -[1 \ \alpha] x. \quad (3.55)$$

Luego, durante el régimen deslizante sobre $s(x) = 0$, las variables de estado están relacionadas según las ecuaciones:

$$\dot{x}_2 = x_1, \quad (3.56)$$

$$x_1 = -\alpha x_2, \quad (3.57)$$

cuya solución proporciona la respuesta temporal:

$$x_1(t) = e^{-\alpha t} x_1(0) \quad (3.58)$$

$$x_2(t) = -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha t} x_1(0). \quad (3.59)$$

Como se aprecia, la dinámica del sistema está impuesta por α (o sea, mediante la superficie $s(x) = 0$), y es insensible a los coeficientes a_{11} y a_{12} en (3.54) del sistema original.

Esta robustez a incertidumbre en los parámetros se pierde parcialmente si las variables de fase x no están disponibles para su realimentación. En efecto, considérese un sistema genérico de segundo orden transformado de forma que el vector de dirección del control sólo tenga el primer elemento no nulo:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \end{bmatrix} u. \quad (3.60)$$

Sobre la superficie de deslizamiento $s(x) = -[1 \ \alpha] x = 0$ las variables de estado se relacionan mediante $x_1 = -\alpha x_2$. La ecuación diferencial que define el comportamiento del sistema en modo deslizante queda:

$$\dot{x}_2 = -a_{21} x_1 + a_{22} x_2 = -\alpha a_{21} x_2 + a_{22} x_2, \quad (3.61)$$

y su solución:

$$x_2(t) = x_2(0) e^{(-\alpha a_{21} + a_{22}) t}, \quad (3.62)$$

es una respuesta de primer orden. En ella influyen no sólo la ganancia α sino también los parámetros a_{21} y a_{22} del sistema, mientras que no la afectan los parámetros a_{11} , a_{12} y b_1 . Es decir, la dinámica del modo deslizante será insensible a incertidumbres en a_{11} , a_{12} y b_1 , aunque no será completamente robusta ante incertidumbres en a_{21} y a_{22} , a diferencia de lo que ocurre en la forma canónica controlable, en la que la incertidumbre paramétrica no interfiere en absoluto en la dinámica del MD -ecuaciones (3.58) y (3.59)-.

Obsérvese que las conclusiones obtenidas para los sistemas (3.54) y (3.60) verifican los resultados obtenidos en esta sección. Mientras la incertidumbre en los parámetros a_{21} y a_{22} no cumple la condición vinculante (por lo que el modo deslizante presenta invarianza débil a este tipo de incertidumbre), las variaciones en a_{11} , a_{12} y b_1 sí lo hacen ya que se presentan en dirección colineal a $g(x) = b_1[1 \ 0]^\top$ (propiedad de invarianza fuerte).

Considérese ahora un sistema lineal de orden n transformado de forma que:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{f(n-1)}^\top \\ a_{c(n-1)} & A_{a(n-1,n-1)} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad (3.63)$$

donde a_f^\top es un vector fila, a_c es un vector columna y A_a es una matriz cuadrada (entre paréntesis se indican las dimensiones de los vectores y/o matrices). Se plantea una superficie de deslizamiento de la forma $s(x) = -k^\top x$, con $k^\top = [1 \ \alpha_{(n-1)}^\top] k_1$, y en la que $k_1 \neq 0$ para que $k^\top b \neq 0$:

$$s(x) = -[1 \ \alpha_{(n-1)}^\top] k_1 x = -k^\top x. \quad (3.64)$$

Sustituyendo la u_{eq} en la dinámica del sistema se deduce la dinámica en lazo cerrado del modo deslizante. De acuerdo a (3.40):

$$\begin{aligned} A_{MD} &= \left(I - b(k^\top b)^{-1} k^\top \right) A = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0_{f(n-1)}^\top \\ 0_{c(n-1)} & I_{(n-1)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \frac{1}{b_1 k_1} [1 \ \alpha_{(n-1)}^\top] k_1 \right) A \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -\alpha_{(n-1)}^\top \\ 0_{c(n-1)} & I_{(n-1)} \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha_{(n-1)}^\top \\ 0_{c(n-1)} & I_{(n-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{f(n-1)}^\top \\ a_{c(n-1)} & A_{a(n-1,n-1)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\alpha_{(n-1)}^\top a_{c(n-1)} & -\alpha_{(n-1)}^\top A_{a(n-1,n-1)} \\ a_{c(n-1)} & A_{a(n-1,n-1)} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.65)$$

En A_{MD} no aparece ni a_{11} , ni a_f^\top ni b_1 (ninguno de los elementos de la primera fila de A y b). Es decir, dichos elementos no tienen ninguna incidencia sobre la dinámica del MD.

Claramente, la primera fila de A_{MD} es linealmente dependiente de las siguientes. Esta dependencia es atribuida a la redundancia con que la ecuación de lazo cerrado describe la dinámica del modo deslizante y se puede eliminar mediante una transformación:

$$\bar{x} = T x, \quad (3.66)$$

$$\bar{A}_{MD} = T A_{MD} T^{-1}, \quad (3.67)$$

donde la matriz T es:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_{(n-1)}^\top \\ 0_{c(n-1)} & I_{(n-1)} \end{bmatrix}, \quad (3.68)$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha_{(n-1)}^\top \\ 0_{c(n-1)} & I_{(n-1)} \end{bmatrix}, \quad (3.69)$$

y la matriz \bar{A}_{MD} adquiere la forma:

$$\bar{A}_{MD} = \begin{bmatrix} 0 & 0_{f(n-1)}^\top \\ a_{c(n-1)} & A_{a(n-1,n-1)} - a_{c(n-1)} \alpha_{(n-1)}^\top \end{bmatrix}. \quad (3.70)$$

Las matrices A_{MD} y \bar{A}_{MD} son semejantes. El polinomio característico de \bar{A}_{MD} es:

$$\Delta_{MD}(s) = s \cdot \det \left(s I_{n-1} - A_a + a_c \alpha^\top \right), \quad (3.71)$$

donde se puede apreciar que la dinámica en modo deslizante no depende de k_1 , b_1 , a_{11} o a_f^\top (invarianza fuerte). Debido a la dinámica reducida del MD se han de asignar solamente $n - 1$ polos (el polo en el origen no tiene significado físico sino que se debe precisamente a la reducción de orden).

3.8. Aplicación del MD en sistemas con modelos en forma normal

En esta sección se estudia una forma de diseñar la superficie de deslizamiento en sistemas con grado relativo mayor que 1 transformados a su forma canónica normal. Para ello, se repasan a continuación la relación entre el grado relativo y las derivadas direccionales, y la transformación necesaria para llevar al sistema a su forma normal.

3.8.1. Grado relativo y transformación a forma normal

Considérese nuevamente un sistema afín en el control:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u, \\ y &= h(x),\end{aligned}\tag{3.72}$$

donde $x \in X \subset \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $u \in \mathbb{R}$ es la acción de control, $f(x)$ y $g(x)$ son campos vectoriales locales suaves, y $h(x)$ es un campo escalar también localmente suave que en el equilibrio x_0 toma el valor $h(x_0) = 0$.

Si se denota con ρ al grado relativo del sistema (3.72) en el punto x_0 , se puede escribir:

$$\begin{aligned}y &= h(x_0) \\ \dot{y} &= \frac{\partial h}{\partial x} \dot{x} = L_f h + L_g h u, \quad \text{si } \rho > 1 \rightarrow \dot{y} \text{ no es función de } u : L_g h = 0 \\ \ddot{y} &= \frac{\partial L_f h}{\partial x} \dot{x} = L_f^2 h + L_g L_f h u, \quad \text{si } \rho > 2 \rightarrow \ddot{y} \text{ no es función de } u : L_g L_f h = 0 \\ &\vdots \\ y^{(\rho-1)} &= \frac{\partial L_f^{(\rho-2)} h}{\partial x} \dot{x} = L_f^{(\rho-1)} h + L_g L_f^{(\rho-2)} h u \rightarrow y^{(\rho-1)} \text{ no es func. de } u : L_g L_f^{(\rho-2)} h = 0 \\ y^{(\rho)} &= \frac{\partial L_f^{(\rho-1)} h}{\partial x} \dot{x} = L_f^{(\rho)} h + L_g L_f^{(\rho-1)} h u \rightarrow y^{(\rho)} \text{ si es función de } u : L_g L_f^{(\rho-1)} h \neq 0\end{aligned}\tag{3.73}$$

Así, en términos de la derivada direccional, se dice que un sistema tiene grado relativo ρ cuando:

$$L_g L_f^{(k)} h = 0, \quad \text{para } 0 < k < \rho - 2\tag{3.74}$$

$$L_g L_f^{(\rho-1)} h \neq 0.\tag{3.75}$$

Se considera en primer lugar (subsecciones 3.8.1 y 3.8.2) que el sistema (3.72) tiene grado relativo n , con lo cual se verificará:

$$y^{(k)} = \frac{\partial L_f^{(k-1)} h}{\partial x} \dot{x} = L_f^{(k)} h + L_g L_f^{(k-1)} h u = L_f^{(k)} h, \quad k = 1, \dots, n-1\tag{3.76}$$

$$y^{(n)} = \frac{\partial L_f^{(n-1)} h}{\partial x} \dot{x} = L_f^{(n)} h + L_g L_f^{(n-1)} h u.\tag{3.77}$$

Con el objetivo de transformar el sistema a su forma canónica normal (Isidori, 1995), se define el siguiente difeomorfismo (transformación suave e invertible):

$$z = \phi(x) = \begin{bmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ L_f^{(2)} h(x) \\ \vdots \\ L_f^{(n-1)} h(x) \end{bmatrix}.\tag{3.78}$$

Para demostrar que existe la transformación inversa $x = \phi^{-1}(z)$ se debe probar que el jacobiano del vector (3.78) es no singular. Suponiendo que esto se cumple, se calcula la realización del sistema en función de la nueva variable z :

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial h}{\partial x} (f(x) + g(x)u) = L_f h = z_2 \\ \dot{z}_2 &= \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial L_f h}{\partial x} \dot{x} = L_f^2 h = z_3 \\ &\vdots \\ \dot{z}_{n-1} &= \frac{\partial \phi_{n-1}}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial L_f^{(n-2)} h}{\partial x} \dot{x} = L_f^{(n-1)} h = z_n \\ \dot{z}_n &= \frac{\partial \phi_n}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial L_f^{(n-1)} h}{\partial x} \dot{x} = L_f^{(n)} h + L_g L_f^{(n-1)} h u = b(z) + a(z)u,\end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned}b(z) &= L_f^{(n)} h|_{x=\phi^{-1}(z)}, \\ a(z) &= L_g L_f^{(n-1)} h|_{x=\phi^{-1}(z)}.\end{aligned}$$

De esta manera, se obtiene la realización canónica normal del sistema:

$$\dot{z}_1 = z_2 \tag{3.79}$$

$$\dot{z}_2 = z_3 \tag{3.80}$$

$$\vdots$$

$$\dot{z}_{n-1} = z_n \tag{3.81}$$

$$\dot{z}_n = b(z) + a(z)u. \tag{3.82}$$

Esta realización del sistema permite un diseño sencillo del control, ya que todas sus no-linealidades se encuentran en la última ecuación. Una estrategia de control inmediata a partir de (3.79)–(3.82) sería aplicar *Linealización Exacta*, mediante la acción de control:

$$u = -\frac{1}{a(z)} (b(z) + v), \tag{3.83}$$

con v de acuerdo a la dinámica que se desee.

A pesar de su simplicidad, la *Linealización Exacta* tiene una limitación importante: presenta una elevada sensibilidad a la variación de los parámetros del sistema. En el próximo punto veremos que el MD aplicado a sistemas en la forma canónica normal preserva la simplicidad de la *Linealización Exacta* a la vez que mejora la robustez frente a la incertidumbre paramétrica.

3.8.2. Diseño de la superficie

La condición de transversalidad (3.9) exige que la superficie de deslizamiento tenga grado relativo unitario respecto a la acción de control discontinua para el establecimiento del MD. Luego, si se quiere controlar una salida con grado relativo mayor que uno (como sucede en (3.79)–(3.82)), se deberán agregar a la superficie tantas derivadas de la salida como sea necesario para que $L_g s \neq 0$.

De acuerdo a lo anterior, para el sistema (3.79)–(3.82) se propone la siguiente función de conmutación lineal en z :

$$s(z) = z_n + a_1 z_{n-1} + \cdots + a_{n-2} z_2 + a_{n-1} z_1, \quad (3.84)$$

donde los a_i son coeficientes constantes. Al establecerse un régimen deslizante sobre la superficie S definida como $s(z) = 0$, la condición de invarianza cumple:

$$s(z) = z_n + a_1 z_{n-1} + \cdots + a_{n-1} z_1 = 0, \quad (3.85)$$

$$\dot{s}(z) = \dot{z}_n + a_1 \dot{z}_{n-1} + \cdots + a_{n-1} \dot{z}_1 = 0. \quad (3.86)$$

De la igualdad (3.85) se obtiene que $z_n = -a_1 z_{n-1} - \cdots - a_{n-1} z_1$. Sustituyendo esta expresión en (3.81), se obtiene la dinámica lineal en modo deslizante de orden reducido:

$$\dot{z}_1 = z_2 \quad (3.87)$$

$$\dot{z}_2 = z_3 \quad (3.88)$$

$$\vdots \quad (3.89)$$

$$\dot{z}_{n-1} = -a_1 z_{n-1} - \cdots - a_{n-1} z_1, \quad (3.90)$$

cuyo polinomio característico viene dado por:

$$\Delta(s) = s^{n-1} + a_1 s^{n-2} + a_2 s^{n-3} + \cdots + a_{n-2} s + a_{n-1}. \quad (3.91)$$

Luego, a diferencia de la linealización exacta por realimentación no lineal de estados, el modo deslizante aplicado a sistemas en forma normal no requiere cancelar la dinámica no lineal propia del sistema, sino que la nueva dinámica (lineal) queda directamente impuesta por los coeficientes que definen la superficie.

Comentario 3.5 Obsérvese que si bien de (3.86) se puede obtener el control equivalente, la ecuación $\dot{z}_n = b(z) + a(z)u_{eq}$ es redundante. Por lo tanto, u_{eq} no es necesaria para obtener la dinámica del sistema en modo deslizante.

Comentario 3.6 Nótese que en términos de las variables originales del sistema, la función de conmutación propuesta en (3.84) resulta

$$s(x) = L_f^{n-1} h + a_1 L_f^{n-2} h + \cdots + a_{n-2} L_f h + a_{n-1} h. \quad (3.92)$$

Como en las derivadas direccionales intervienen los parámetros del sistema, si los estados canónicos z_1, \dots, z_n no son accesibles la robustez se perderá parcialmente.

3.8.3. Forma normal para grado relativo $\rho < n$ y dinámica inversa

Ahora nos interesa estudiar qué sucede si el sistema (3.72) tiene grado relativo $\rho < n$.

En este caso, se plantea una transformación $z = \phi(x)$ suave e invertible dada por:

$$z = \phi(x) = \begin{bmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ \vdots \\ L_f^{(\rho-1)} h(x) \\ \phi_{\rho+1} \\ \vdots \\ \phi_n \end{bmatrix}. \quad (3.93)$$

Las funciones ϕ_k con $\rho + 1 \leq k \leq n$ se eligen arbitrariamente, con la condición que $\phi(x)$ siga siendo un difeomorfismo (no-singular). De esta manera, la forma normal para $\rho < n$ queda:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 &= L_f h = z_2 \\ \dot{z}_2 &= L_f^2 h = z_3 \\ &\vdots \\ \dot{z}_{\rho-1} &= L_f^{\rho-1} h = z_\rho \\ \dot{z}_\rho &= L_f^\rho h + L_g L_f^{\rho-1} u \end{cases} \quad (3.94)$$

$$\begin{cases} \dot{z}_{\rho+1} &= q_{\rho+1}(z) + p_{\rho+1}(z) u \\ &\vdots \\ \dot{z}_n &= q_n(z) + p_n(z) u. \end{cases} \quad (3.95)$$

Se puede apreciar que existen dos tipos de variables z , los cuales se denotarán como $\xi = [z_1 \ z_2 \ \dots \ z_\rho]^T$ y $\eta = [z_{\rho+1} \ z_{\rho+2} \ \dots \ z_n]^T$. Empleando esta nueva notación, el sistema se puede escribir como:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\vdots \\ \dot{z}_{\rho-1} &= z_\rho \\ \dot{z}_\rho &= b(\xi, \eta) + a(\xi, \eta) u \end{cases} \quad (3.96)$$

$$\begin{cases} \dot{\eta} &= q(\xi, \eta) + p(\xi, \eta) u. \end{cases} \quad (3.97)$$

La dependencia de las variables η con respecto a u puede eliminarse eligiendo apropiadamente las componentes ϕ_k con $\rho + 1 \leq k \leq n$ (Isidori, 1995). Se supone en adelante que esto fue llevado a cabo.

Al igual que para sistemas de grado relativo n , la dinámica de la salida (y sus derivadas) puede fijarse mediante el diseño apropiado de una superficie de deslizamiento. En este caso se propone:

$$s(\xi) = z_\rho + a_1 z_{\rho-1} + a_2 z_{\rho-2} + \dots + a_{\rho-1} z_1. \quad (3.98)$$

El MD impone $s(\xi) = 0$ y por lo tanto $z_\rho = -a_1 z_{\rho-1} - a_2 z_{\rho-2} - \dots - a_{\rho-1} z_1$. Luego, la dinámica reducida durante el MD será:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\vdots \\ \dot{z}_{\rho-1} &= -a_1 z_{\rho-1} - a_2 z_{\rho-2} - \dots - a_{\rho-1} z_1 \\ \dot{\eta} &= q(\xi, \eta). \end{cases} \quad (3.99)$$

$$\quad (3.100)$$

Véase que la dinámica de las variables η no afecta a la salida, que evolucionará de acuerdo a la selección de los parámetros a_j , con $1 \leq j \leq \rho-1$. Precisamente, debido a que la dinámica de las variables η no tiene ninguna influencia sobre la salida, se la denomina *dinámica escondida*. Habitualmente, la única restricción que se impone a la dinámica escondida es que sea estable, para que el sistema completo (ξ, η) sea internamente estable.

Con una adecuada selección de los parámetros a_j , el error de salida y sus derivadas tienden a cero. En particular, se puede plantear que $\xi = 0 \in \mathbb{R}^\rho$ en estado estacionario. En este caso, la dinámica escondida será:

$$\dot{\eta} = q(0, \eta) = \bar{q}(\eta). \quad (3.101)$$

A esta dinámica, que es la dinámica escondida cuando la salida es idénticamente nula, se la conoce como *dinámica de los ceros* o *dinámica inversa*. Se dice que el sistema es de mínima fase cuando la dinámica inversa es estable y de no-mínima fase cuando es inestable. Luego, para que la estrategia de control por MD presentada en esta sección pueda implementarse en sistemas con grado relativo $\rho < n$, el sistema ha de ser de mínima fase.

3.9. Observadores por modo deslizante

Mediante sistemas de estructura variable se puede también implementar una estimación de los estados del sistema. En esta sección se presenta el desarrollo de un observador de estados por MD para sistemas lineales multivariantes invariantes en el tiempo, y se lo compara con los observadores de estados convencionales. Para ello, se repasan brevemente las ideas

involucradas en el diseño de observadores de estados de sistemas MIMO, tanto de orden completo como de orden reducido.

Considérese el siguiente sistema:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3.102)$$

$$y = Cx, \quad (3.103)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $\text{rango}(C) = m$. El par (A, C) se supone observable.

Un observador lineal asintótico se diseña de la misma forma que el sistema original (3.102) con una entrada adicional que depende de la diferencia entre el vector de salida real (3.103) y el vector de salida estimado:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(C\hat{x} - y), \quad (3.104)$$

donde \hat{x} es el vector de estados observados y $L \in \mathbb{R}^{n \times m}$ es una matriz de ganancias constantes. Luego, como es sabido, la ecuación que rige la dinámica del error $\bar{x} = \hat{x} - x$ es

$$\dot{\bar{x}} = (A + LC)\bar{x}. \quad (3.105)$$

El comportamiento de \bar{x} queda determinado entonces por los autovalores de la matriz $A + LC$. Como el par (A, C) se supuso observable, estos autovalores pueden asignarse arbitrariamente mediante una elección adecuada de la matriz L . Esto significa que se puede obtener la velocidad de convergencia “deseada” en la estimación.

Debido a que $\text{rango}(C) = m$, el orden del observador anterior puede reducirse a $n - m$ si se miden las m salidas. Para ello, el vector de estados puede descomponerse de la siguiente forma

$$x^T = [x_1^T \ x_2^T], \quad x_1 \in \mathbb{R}^{n-m}, \quad x_2 \in \mathbb{R}^m. \quad (3.106)$$

quedando así el vector de salida representado por

$$y = C_1x_1 + C_2x_2, \quad \det(C_2) \neq 0. \quad (3.107)$$

De esta manera, será suficiente con diseñar un observador para estimar solamente el vector x_1 , y luego obtener el vector x_2 de

$$x_2 = C_2^{-1}(y - C_1x_1). \quad (3.108)$$

Mediante una transformación de coordenadas T , las ecuaciones (3.102)-(3.103) se pueden escribir en el espacio (x_1, y) como

$$\dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}y + B_1u, \quad (3.109)$$

$$\dot{y} = A_{21}x_1 + A_{22}y + B_2u, \quad (3.110)$$

donde

$$TAT^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad TB = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad (3.111)$$

y

$$T = \begin{bmatrix} I_{n-m} & 0 \\ C_1 & C_2 \end{bmatrix}. \quad (3.112)$$

Claramente, T es no singular. Haciendo ahora la transformación

$$x' = x_1 + L_1 y, \quad (3.113)$$

que es también no-singular para cualquier $L_1 \in \mathbb{R}^{(n-m) \times m}$, el diseño del observador de orden reducido se plantea en el espacio (x', y) . De (3.108), (3.109), (3.110) y (3.113) la ecuación de estados en x' es

$$\dot{x}' = (A_{11} + L_1 A_{21})x' + A'_{12}y + (B_1 + L_1 B_2)u, \quad (3.114)$$

siendo

$$A'_{12} = A_{12} + L_1 A_{22} - (A_{11} + L_1 A_{21})L_1. \quad (3.115)$$

El observador se diseña entonces como un sistema dinámico de orden $(n - m)$

$$\dot{\hat{x}}' = (A_{11} + L_1 A_{21})\hat{x}' + A'_{12}y + (B_1 + L_1 B_2)u, \quad (3.116)$$

donde \hat{x}' es una estimación del vector de estados x' . El error $\bar{x}' = \hat{x}' - x'$ evoluciona de acuerdo a

$$\dot{\bar{x}}' = (A_{11} + L_1 A_{21})\bar{x}'. \quad (3.117)$$

Nuevamente, si el sistema original es observable, los autovalores de la matriz $A_{11} + L_1 A_{21}$ pueden asignarse arbitrariamente (Kwakernaak y Sivan, 1972). Luego, la estimación \hat{x}' tenderá al vector de estados x' con la velocidad deseada. Finalmente, las componentes del vector de estados original x_1 y x_2 se hallan a partir de (3.108) y (3.113).

Ahora se introduce el MD en el diseño del observador (Utkin, 1992; Utkin *et al.*, 1999). Las señales de entrada de *corrección* del observador serán en este caso funciones discontinuas del error en la estimación. El observador por MD se puede describir con las siguientes ecuaciones diferenciales

$$\dot{\hat{x}}_1 = A_{11}\hat{x}_1 + A_{12}\hat{y} + B_1 u + L_1 w, \quad (3.118)$$

$$\dot{\hat{y}} = A_{21}\hat{x}_1 + A_{22}\hat{y} + B_2 u - w, \quad (3.119)$$

donde \hat{x}_1 y \hat{y} son las estimaciones de los estados del sistema en el espacio (x_1, y) , y $w \in \mathbb{R}^m$ es la siguiente señal discontinua

$$w = M \operatorname{sign}(\hat{y} - y), \quad (3.120)$$

con $M > 0$ constante finita suficientemente grande.

Las ecuaciones que rigen la dinámica de los errores de estimación en x_1 e y se obtienen de (3.109)-(3.110) y (3.118)-(3.119), resultando

$$\dot{\bar{x}}_1 = A_{11}\bar{x}_1 + A_{12}\bar{y} + L_1w, \quad (3.121)$$

$$\dot{\bar{y}} = A_{21}\bar{x}_1 + A_{22}\bar{y} - w. \quad (3.122)$$

Obsérvese que, para condiciones iniciales acotadas, la elección de la señal w hecha en (3.120) fuerza un régimen deslizante sobre la superficie $\bar{y} = \hat{y} - y = 0$, ya que la matriz que multiplica a w en (3.122) (matriz identidad negativa) es negativa definida (Utkin *et al.*, 1999). Al establecerse el MD sobre esta superficie se anula el error entre la estimación \hat{y} y el vector de salida y . Resta entonces encontrar la matriz L_1 que haga que el error $\bar{x}_1 = \hat{x}_1 - x_1$ entre x_1 y su estimación \hat{x}_1 decaiga con la velocidad deseada. Utilizando el método del control equivalente, se reemplaza la solución w_{eq} de $\dot{\bar{y}} = 0$ en (3.121) con $\bar{y} = 0$ para obtener la dinámica durante el modo deslizante. Así,

$$w_{eq} = A_{21}\bar{x}_1, \quad (3.123)$$

$$\dot{\bar{x}}_1 = (A_{11} + L_1A_{21})\bar{x}_1, \quad (3.124)$$

que coincide con (3.117). Luego, se podrá fijar arbitrariamente la velocidad de convergencia de \bar{x}_1 a cero eligiendo L_1 . El vector x_2 se calcula según (3.108).

Por lo tanto, el análisis de la dinámica del error de un observador de orden completo con entrada discontinua w es equivalente al de un observador convencional pero de orden reducido. Sin embargo, las distintivas propiedades de los regímenes deslizantes permiten obtener con el observador por MD resultados que no se alcanzarían con un observador convencional. Un ejemplo de esto es la aplicación que se presenta en el Apéndice A.

3.10. Posibles causas de deterioro de la performance

A continuación se describen brevemente dos de las principales causas de deterioro en la performance de los sistemas de estructura variable: el llamado *modo de alcance* y el efecto no deseado de *chattering*. En los capítulos siguientes, se comprobará que las estrategias de control propuestas en esta tesis no son afectadas por ninguno de estos dos problemas.

Modo de alcance

El modo de alcance es el modo de operación del sistema de estructura variable durante el cual la trayectoria del estado evoluciona desde una condición inicial hasta un punto sobre la variedad de deslizamiento donde se cumple la condición de existencia del MD. La *condición de alcance* está dada por (3.4), y debe ser garantizada mediante la ley de control (3.3).

Si bien en la literatura existen distintos métodos para la operación en modo de alcance (Hung *et al.*, 1993), una característica común a todos ellos es que durante este modo de operación la señal de entrada al sistema no conmuta entre dos valores (u^- y u^+), sino que toma un valor constante (que depende del método utilizado). Esto difiere del comportamiento que tiene el sistema en régimen deslizante, durante el cual la acción de control discontinua impone al sistema una dinámica equivalente a la que provocaría el control continuo u_{eq} , que generalmente no es constante (aunque sí está acotado por u^- y u^+). Consecuentemente, la fase de alcance puede degradar la performance global de un sistema de estructura variable, particularmente si la superficie se alcanza fuera del dominio del régimen deslizante, en cuyo caso se prolonga el modo de alcance (Mantz *et al.*, 2005a).

Chattering

En las aplicaciones prácticas del MD convencional, un problema importante son las oscilaciones indeseadas de frecuencia y amplitud finita que en forma frecuente afectan el desempeño del sistema. Este efecto es conocido por la palabra inglesa *chattering*, y se produce cuando el estado del sistema no se desliza sobre la variedad de deslizamiento, sino que la trayectoria oscila alrededor de la misma.

Básicamente, pueden identificarse dos causas principales de *chattering* (Young *et al.*, 1999):

Una de ellas es la presencia de dinámica parásita. La ley de control de alta frecuencia de conmutación puede excitar dinámicas no modeladas. Esta dinámica parásita incluye la dinámica de los sensores, los actuadores y dinámicas rápidas de la planta que generalmente no se incluyen en el modelado por ser significativamente más rápidas que la dinámica dominante del sistema. La interacción entre esta dinámica parásita y el control de estructura variable da como resultado rápidas oscilaciones de amplitud y frecuencia finita.

La otra causa de *chattering* es debida a las limitaciones propias de los sistemas de conmutación, como retardos de las llaves y tiempos de cómputo, que en muchas aplicaciones limitan la frecuencia de conmutación.

Se han investigado diversos métodos para reducir los problemas de *chattering*. Una de las primeras y más difundidas técnicas consiste en reemplazar el dispositivo de conmutación por una alta ganancia con saturación. Esto da lugar a una banda en el entorno de la superficie de deslizamiento, dentro de la cual el controlador se comporta como un control continuo de alta ganancia. Este método elimina el problema de *chattering* y reduce fuertemente los problemas asociados al desgaste mecánico (Slotine y Sastry, 1983; Esfandiari y Khalil, 1991). Sin embargo, hay casos en los que las discontinuidades del control son inherentes al sistema, y por lo tanto no es posible o no conviene reemplazar la discontinuidad propia del sistema por una función de saturación continua (Utkin *et al.*, 1999).

El modo deslizante basado en observador es otra metodología útil para reducir el *chattering* (Bondarev *et al.*, 1985). Este método consiste en generar el modo deslizante en un lazo auxiliar que incluya al observador pero no a la planta. De esta forma, se evita que el lazo auxiliar contenga la dinámica parásita. El lazo principal de control con la planta y sus actuadores sigue al lazo auxiliar en el que se genera la acción discontinua de acuerdo a la dinámica del observador (Utkin *et al.*, 1999; Utkin y Lee, 2006).

Por último, una estrategia de gran impulso en la actualidad que también contribuye a reducir el *chattering* es el denominado control por Modo Deslizante de Orden Superior (MDOS). Este tipo de control se aplica principalmente a aquellos sistemas de grado relativo mayor que uno, aunque también se utiliza en sistemas de grado relativo unitario a los que se les adiciona un sistema de primer orden (típicamente, un integrador), a los efectos de evitar que se aplique directamente una acción de control discontinua (Levant, 2000, 2001; Fridman y Levant, 2002). Existe en particular una gran cantidad de resultados vinculados al control por Modo Deslizante de Segundo Orden (Bartolini *et al.*, 2003).

3.11. Resumen del capítulo

Este capítulo introdujo los sistemas de control por estructura variable y los regímenes deslizantes. Se presentó el método del control equivalente, que permite encontrar un sistema continuo equivalente al modo deslizante a partir del cual se puede obtener una expresión para la dinámica durante la operación por MD. Se hallaron también las condiciones para la existencia del régimen deslizante. Se detallaron las propiedades de robustez, tanto del dominio de existencia del MD como de la dinámica durante el mismo ante perturbaciones externas y/o incertidumbres paramétricas. Luego, se describió la aplicación del CEV a sistemas descriptos en la forma canónica normal, particularmente útil cuando se quiere controlar una salida con grado relativo mayor que uno. Se describieron también los observadores por MD para sistemas lineales multivariantes. Finalmente, se mencionaron brevemente algunos inconvenientes en la implementación de los controladores por modo deslizante, como el efecto de *chattering*, estrechamente relacionado a la frecuencia de conmutación y las dinámicas no modeladas.

CAPÍTULO 4

DESACOPLAMIENTO DINÁMICO CON RESTRICCIONES EN LA ENTRADA A LA PLANTA

En el Capítulo 2 se presentó una metodología para lograr el desacoplamiento dinámico a lazo cerrado de sistemas MIMO. Una suposición implícita del método visto, y en general de la mayoría de las técnicas de desacoplamiento que existen en la literatura, es que los actuadores son ideales, es decir, que no tienen restricciones de ningún tipo. Sin embargo, cuando se consideran las inevitables limitaciones físicas de los actuadores reales, la activación de cualquier restricción en al menos uno de los actuadores produce un cambio en la dirección de la entrada a la planta con respecto a la del vector de control, lo que causa la pérdida del desacoplamiento obtenido para la operación lineal de los actuadores.

En este capítulo se estudian los problemas derivados de las restricciones en la entrada a la planta, como el *windup* y el *cambio de direccionalidad* del vector de control. Luego, se presenta un método de compensación por modo deslizante para preservar el desacoplamiento dinámico del lazo cerrado al alcanzarse los límites de amplitud (saturación) en los actuadores. La propuesta puede combinarse con cualquier técnica de desacoplamiento válida para la operación lineal de los actuadores. El desarrollo de este último algoritmo puede encontrarse en (Garelli *et al.*, 2005, 2007).

4.1. Introducción

El desacoplamiento entrada/salida constituye un frecuente requerimiento de diseño en los sistemas de control de múltiples entradas y salidas. Dicha especificación puede variar desde la exigencia de un desacoplamiento estático (sólo en estado estacionario) hasta el desacoplamiento dinámico completo (para todo instante de tiempo). Este último, que obviamente es el más exigente, implica que cualquier cambio de set-point en una variable controlada del proceso produzca sólo la variación correspondiente en dicha variable, sin afectar a ninguna de las restantes variables controladas del sistema.

Las ventajas del desacoplamiento dinámico son intuitivas. Por ejemplo, uno puede desear variar la temperatura sin que cambie transitoriamente la presión, o modificar el ángulo de ataque de un avión sin que por ello varíe su altura. El desacoplamiento dinámico transforma a un sistema MIMO en un conjunto de sistemas SISO, y por lo tanto es una aproximación al denominado control perfecto, en el que $T(s) = I$.

Por otro lado, como se ha mencionado en el Capítulo 2, el desacoplamiento dinámico tiene naturalmente costos aparejados. En particular, es sensible a la incertidumbre de modelado y puede afectar la performance de lazo cerrado en cada canal desacoplado, lo cuál depende de los polos y ceros de lazo abierto en el SPD (Seron *et al.*, 1997). De todas formas, la evaluación de estos costos ya ha sido abordada en la literatura y escapa a los objetivos del capítulo. Aquí se considerará como principal requerimiento de control al desacoplamiento dinámico nominal. En los dos capítulos subsiguientes se propondrán alternativas para relajar algunos de los costos asociados al desacoplamiento dinámico.

Existen variadas técnicas de control para obtener el desacoplamiento dinámico de un sistema MIMO sin considerar restricciones en los actuadores del sistema, como por ejemplo las descritas o referenciadas en el Capítulo 2. No importa cuál de estos métodos se utilice, el problema se torna más complicado cuando se consideran las limitaciones físicas de los actuadores. En este caso, la saturación de cualquier acción de control lleva al sistema a comportarse como un lazo abierto, haciendo inconsistentes las salidas del controlador con las entradas de la planta. De esta manera, además de aparecer el conocido problema de *windup*, se produce un cambio en la dirección del vector de entrada a la planta, lo que acarrea la pérdida del desacoplamiento obtenido para el caso sin restricciones.

Entre los más tempranos esfuerzos por preservar la dirección del control en sistemas multivariados con restricciones, Hanus y Kinnært (1989) fueron los primeros en proponer modificar la técnica de *acondicionamiento de la referencia* para abordar los problemas propios de los sistemas MIMO. Esta técnica fue originalmente pensada por Hanus *et al.* (1987) como un método *anti-windup* SISO para controladores PI, y luego extendida por Walgama *et al.* (1992) para tratar con una clase más general de controladores SISO. Con el fin de aplicar el acondicionamiento de la referencia a los sistemas MIMO, Hanus y Kinnært (1989) propusieron diseñar una no-linealidad artificial ubicada justo antes de la no-linealidad real de forma tal que la referencia condicionada se mantenga lo más cercana posible a la referencia original, bajo cierto criterio. Posteriormente, Walgama y Sternby (1993) integraron las ideas de Hanus y Kinnært con una generalización del acondicionamiento de la referencia mediante la incorporación de un set-point filtrado. Otra contribución en esta línea digna de mencionar fue hecha en Peng *et al.* (1998), donde se obtienen de forma sencilla una parametrización de los compensadores *anti-windup* y una forma óptima de diseñarlos. Técnicas basadas en sistemas lineales de parámetros variantes (LPV, Linear Parameter-Varying), en desigualdades lineales matriciales (LMI, Linear Matrix Inequalities) y en cotas en L_2 también fueron aplicadas a este problema (Wu y Grigoriadis, 1999; Mulder *et al.*, 2001; Zaccarian y Teel, 2002). En (Soroush *et al.*, 2005) se presenta un método basado en optimización para el caso de sistemas discretos con restricciones de entrada.

Sin embargo, la preservación de la direccionalidad del control es necesaria pero no suficiente para mantener el desacoplamiento dinámico del lazo cerrado en presencia de restricciones en la entrada a la planta. La mayoría de los métodos basados en optimización -por ejemplo, Hanus y Kinnært (1989), Walgama y Sternby (1993) y Peng *et al.* (1998)- evitan el cambio de direccionalidad en el control modificando todo el vector de referencias. De esta manera, si bien solucionan satisfactoriamente un problema que hubiese causado la pérdida del des-

acoplamiento, la metodología utilizada puede -en menor medida- también afectar el grado de desacoplamiento del sistema. En efecto, cuando se produce un cambio en una referencia individual, la corrección simultánea del vector completo de referencias puede modificar los set-point que permanecieron constantes, y por lo tanto causar efectos transitorios en variables controladas que no deberían verse afectadas. Luego, cuando el proceso a controlar permite alcanzar los puntos de operación mediante sucesivos cambios individuales de referencia, algo frecuente por ejemplo en el control de procesos químicos, es posible mejorar el grado de desacoplamiento del sistema. Dado que aquí se considera al desacoplamiento dinámico como el principal objetivo de control, nos centraremos en este tipo de operación, también considerado en Goodwin *et al.* (2001). Allí la preservación del desacoplamiento se consigue escalando el vector de error, lo que es equivalente a introducir una ganancia no-lineal en el controlador. Dicho método muestra ser efectivo y mantiene el desacoplamiento dinámico. Sin embargo, como se indica en la referencia citada, para determinados procesos puede ocurrir que no exista un escalamiento del error que retorne al sistema a la región de operación lineal.

En este capítulo se presenta una técnica para preservar el desacoplamiento dinámico en sistemas multivariables con restricciones, asegurando que las variables cuyos set-points permanecen constantes no se vean afectadas. La propuesta combina el *acondicionamiento de la referencia* con conceptos de los sistemas de estructura variable operando bajo régimen deslizante. La corrección de la referencia se lleva a cabo mediante una señal de control discontinua, de forma tal de evitar la saturación de los actuadores. El método propuesto no impone limitaciones respecto al número de entradas/salidas del sistema (cuadrado), ni respecto al tipo de controlador centralizado. Para este último, se obtienen condiciones a fin de garantizar la estabilidad de la compensación por MD.

4.2. Restricciones en la entrada a la planta

4.2.1. *Windup*

Es sabido que todos los procesos del *mundo real* están sujetos a restricciones, en particular debido a las limitaciones físicas de los actuadores. Por ejemplo, cualquier motor tiene una velocidad máxima que no debería superar, las válvulas no pueden abrirse más del 100 % ni menos del 0 %, el caudal de una bomba está limitado, etc. En los sistemas de control a lazo cerrado, los requerimientos sobre la respuesta transitoria de las variables controladas llevan frecuentemente a que la acción de control alcance estas limitaciones en la entrada a la planta. Cuando esto sucede, si no se toma alguna medida para evitarlo, el lazo de realimentación se rompe y el sistema opera como si estuviese a lazo abierto, ya que el actuador sigue en su límite máximo (o mínimo) independientemente de la salida del controlador, hasta tanto ésta no regrese a su “región permitida”.

Esto último trae aparejado un deterioro significativo de la performance de lazo cerrado con respecto a la esperada para la operación lineal de los actuadores, que puede llevar incluso a la inestabilidad, y se conoce como efecto de *windup*. Existe una vasta bibliografía dedicada al estudio del *windup* y sus posibles soluciones en sistemas univariados, de la cual algunos de los trabajos más citados han sido los aportes de Hanus *et al.* (1987); Åström y Rundqwist (1989); Kothare *et al.* (1994) y Peng *et al.* (1996). Para ilustrar este fenómeno en los sistemas SISO se presenta el siguiente ejemplo:

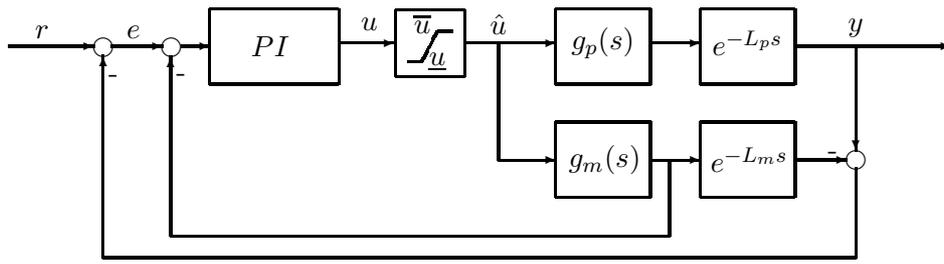


Figura 4.1: Control PI con predictor de Smith de una columna de destilación.

Ejemplo 4.1 *Considérese una columna de destilación con un controlador PI y un predictor de Smith como se muestra en la Figura 4.1. La función de transferencia de esta planta es*

$$p(s) : g_p(s)e^{-L_p s} = \frac{0,57}{(8,60s + 1)^2} e^{-18,70s} \quad (4.1)$$

El controlador PI y el predictor de Smith fueron diseñados mediante técnicas de sintonización automática del control (Hang et al., 2002), resultando

$$\tilde{p}(s) : g_m(s)e^{-L_m s} = \frac{0,57}{(7,99s + 1)^2} e^{-18,80s} \quad (4.2)$$

$$PI : K_p \left(1 + \frac{1}{sT_i} \right) = 1,75 \left(1 + \frac{1}{7,99s} \right). \quad (4.3)$$

El objetivo aquí no es evaluar el desempeño del conjunto PI-Predictor de Smith, ya que podría considerarse cualquier otro controlador diseñado para la operación lineal de los actuadores, sino observar cómo la performance se deteriora al alcanzarse alguna no-linealidad incluso ante técnicas modernas de sintonizado del control con gran aceptación de la industria.

Los resultados de simulación para el lazo cerrado en ausencia de restricciones en el actuator se presentan con línea punteada en la Figura 4.2. La respuesta de la variable controlada con un sobrepaso de aproximadamente 15% se considera la respuesta aceptada para el sistema de control. En el recuadro inferior se observa la evolución de la salida del controlador, que coincide en todo instante de tiempo con la entrada a la planta.

Las curvas en trazo continuo de la Figura 4.2 grafican la respuesta del lazo cerrado con restricciones en el actuator $\hat{u} \leq \bar{u}$, para tres casos: $\bar{u} = 2,2$, $\bar{u} = 2$ y $\bar{u} = 1,9$. Como evidencia la parte inferior de la figura, la salida del controlador u (línea a trazos) excede la acción de control disponible durante períodos prolongados. Esto provoca que la salida y evolucione más lentamente que en el caso sin restricciones, y por lo tanto el error e decaea más lentamente. De esta manera, el término integral del PI toma un valor mucho mayor que cuando el sistema opera en la región lineal del actuator. Así, aún cuando y se aproxima al valor

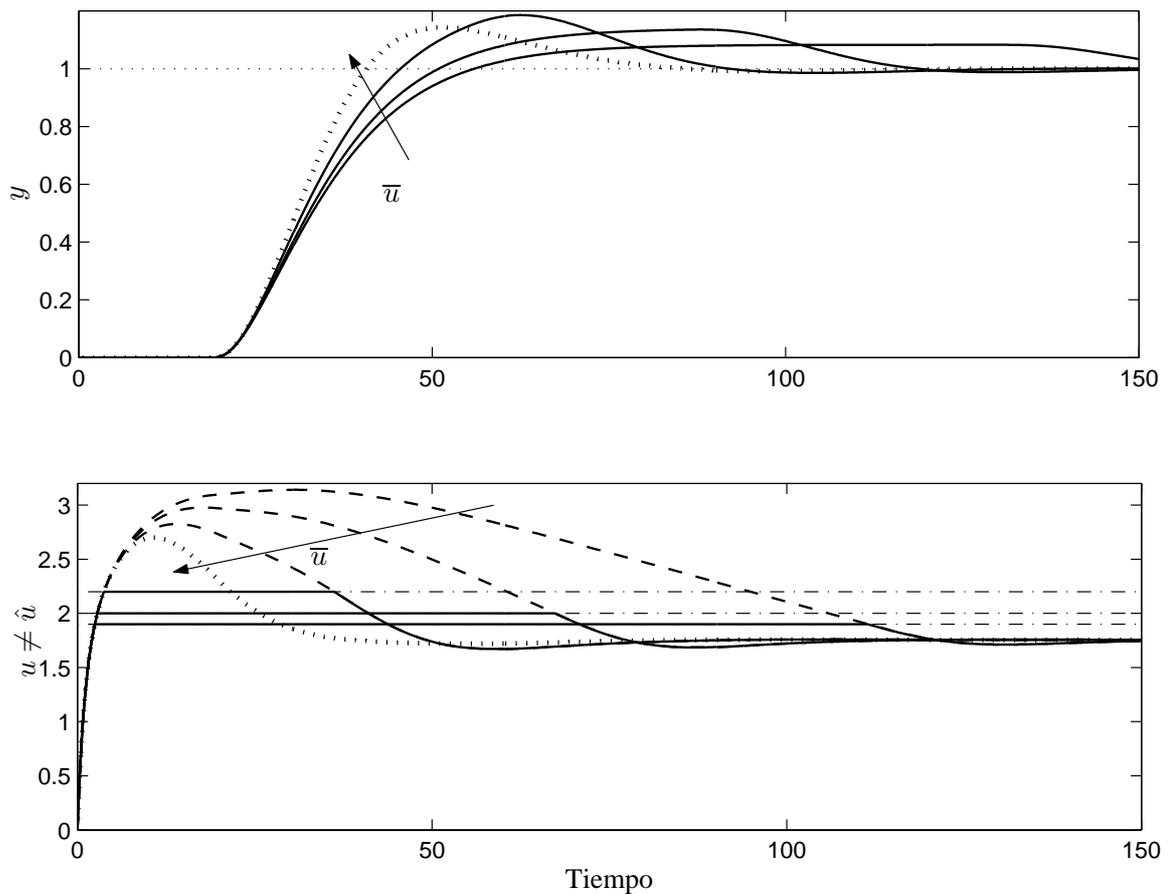


Figura 4.2: Efecto de windup para distintos valores de saturación

de referencia r , la acción de control u sigue saturada debido al aporte del término integral, y recién decrece una vez que el error e haya sido negativo durante un tiempo suficientemente grande. Este es un típico efecto de windup, cuya consecuencia en este caso son los largos tiempos de establecimientos en la variable controlada y que se observan en el gráfico superior de la Figura 4.2. Como puede apreciarse, el tiempo de establecimiento crece a medida que la saturación se hace más restrictiva.

4.2.2. Cambio de direccionalidad del control

Al igual que en los sistemas SISO, la presencia de saturaciones genera en los sistemas multivariables una inconsistencia entre los estados o salidas del controlador y las entradas a la planta, que lleva a un deterioro de la performance del lazo cerrado y puede interpretarse como un problema de windup.

Por otro lado, debido a que en los sistemas multivariables la saturación puede ocurrir en forma independiente en cada actuador, aparece el problema de cambio direccional del vector de control, característico de los sistemas MIMO. Como hemos visto en el Capítulo 2, para el

desacoplamiento de un sistema de control multivariable generalmente es necesario un fuerte acoplamiento entre el proceso y el controlador. De hecho, este último debe incluir alguna aproximación de la inversa de la planta para evitar las interacciones a lazo cerrado. Lo que sucede en presencia de saturaciones múltiples es que la acción individual de cada saturación altera el acoplamiento entre el controlador y la planta modificando la dirección necesaria del vector de control para obtener el desacoplamiento del sistema. De esta forma, se pierde el grado de desacoplamiento obtenido para la operación lineal de los actuadores y se deteriora fuertemente la respuesta a lazo cerrado. El cambio de direccionalidad del control será también descrito a través de un ejemplo:

Ejemplo 4.2 Consideramos ahora un problema presentado en *Campo y Morari (1990)*, que luego fue utilizado por varios autores para verificar el desempeño de otras estrategias de control -véanse por ejemplo *Zheng et al. (1994)* y *Mulder et al. (2001)*-. La dinámica de la planta a controlar viene dada por:

$$P(s) = \frac{1}{10s + 1} \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

El desacoplamiento de este proceso se llevó a cabo en *Campo y Morari (1990)* mediante el controlador:

$$C(s) = \frac{10s + 1}{s} \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Para apreciar la correspondencia entre este controlador y las metodologías presentadas en el Capítulo 2, es importante observar que con este controlador se obtiene la siguiente matriz de transferencia a lazo cerrado

$$T(s) = D_Q(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}, \quad (4.6)$$

cuyos elementos tienen grado relativo igual al grado de las columnas correspondientes del interactor izquierdo de $P(s)$ ($\alpha = 1$)

$$\xi_l(s) = \begin{bmatrix} s + 1 & 0 \\ 0 & s + 1 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

De acuerdo a la ecuación (2.32), $C(s)$ corresponde al siguiente controlador IMC

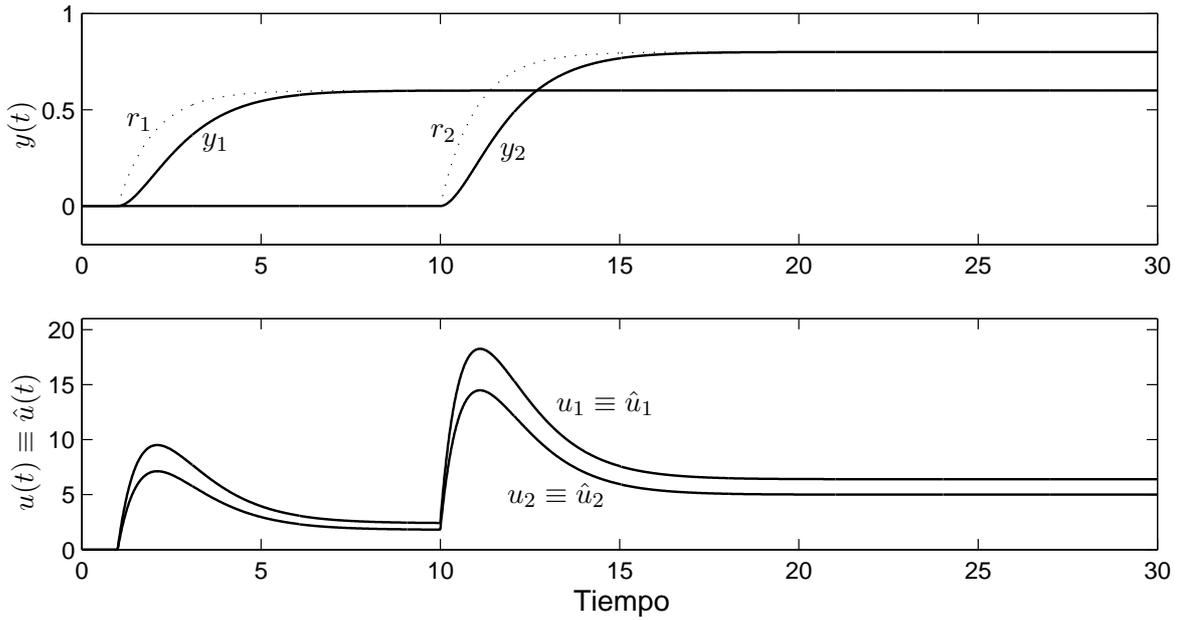


Figura 4.3: Evolución de las variables controladas y y las acciones de control u para el sistema sin restricciones

$$Q(s) = \Lambda_l^{-1}(s)\xi_l(s)D_Q(s) = \frac{10s + 1}{s + 1} \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad (4.8)$$

que es bipropio y estable, por lo que el sistema a lazo cerrado es internamente estable.

Al sistema con el controlador (4.5) se le aplicaron referencias de tipo escalón pero filtradas por encima de $\omega = 1$ (es decir, se agregó un filtro con un ancho de banda idéntico al del lazo cerrado). El propósito de este filtrado no es evitar los problemas debidos a las saturaciones en los actuadores, sino permitir una mejor visualización del efecto de cambio de direccionalidad del control, que es la intención de esta subsección.

Los resultados obtenidos para el sistema sin limitaciones de ningún tipo se presentan en la Figura 4.3. Como se puede apreciar, el controlador (4.5) obtiene el desacoplamiento dinámico completo del sistema durante la operación lineal del mismo. Las salidas del controlador u coinciden en este caso con las entradas a la planta \hat{u} , según muestran las curvas en la parte inferior de la figura.

Si en cambio ahora se agrega un elemento no-lineal de saturación representando la limitación de amplitud de cada actuador, la respuesta se ve seriamente afectada. En este caso se considera como límite máximo del actuador a $\bar{u} = 15$. La Figura 4.4 muestra que ante el cambio de referencia para y_1 el sistema permanece desacoplado, ya que el vector de control no alcanza los límites y preserva por tanto su dirección, mientras que como consecuencia del

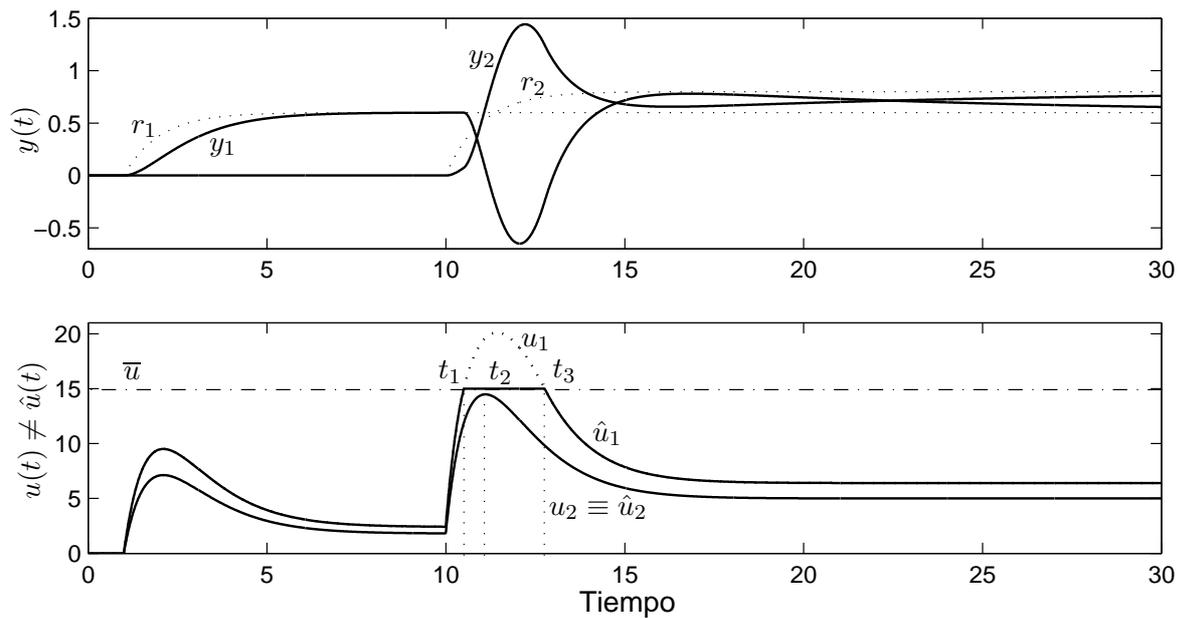


Figura 4.4: Evolución de las variables controladas y y las acciones de control u para el sistema con saturación de actuadores

cambio de set-point para y_2 el primer actuador satura entre t_1 y t_3 ($u \neq \hat{u}$), dando lugar a respuestas inaceptables en ambos canales.

El cambio de dirección del vector de control que provoca la pérdida del desacoplamiento en este último caso puede verse con mayor claridad en la Figura 4.5, donde se grafican las trayectorias del vector de control en el plano (u_1, u_2) . El ángulo entre el vector de entrada a la planta $\hat{u}(t)$ y la salida del controlador $u(t)$, que es distinto de cero entre t_1 y t_3 , indica el cambio de direccionalidad en el control. En la figura las dos flechas a trazos muestran el apartamiento direccional entre $\hat{u}(t)$ y $u(t)$ para el instante t_2 .

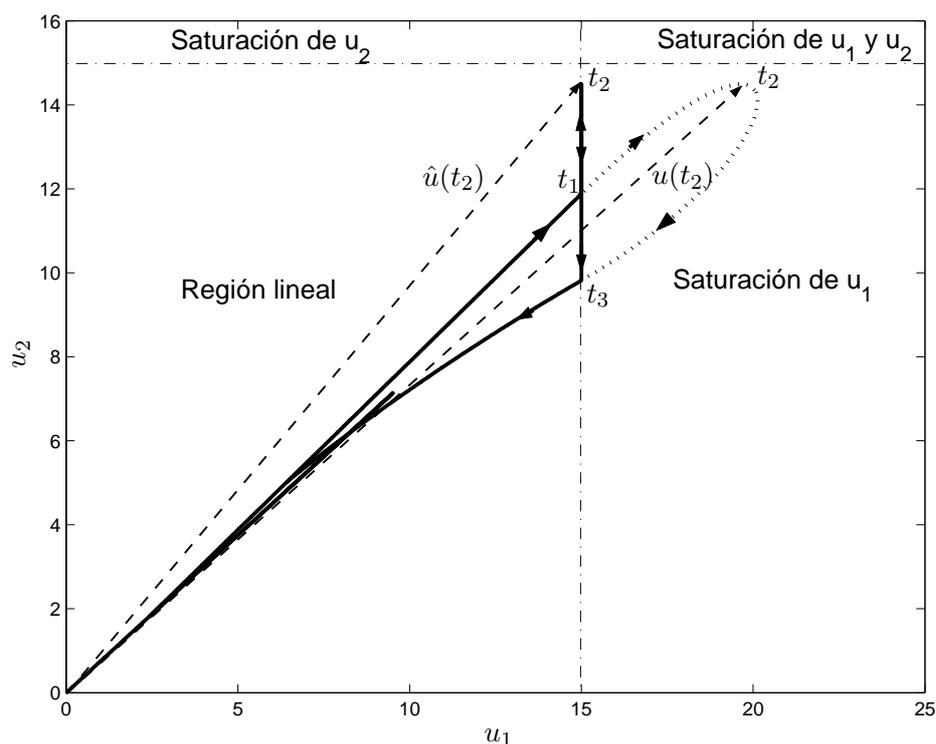


Figura 4.5: Cambio de direccionalidad del control

4.3. Acondicionamiento por MD en sistemas monovariales

Para preservar el desacoplamiento dinámico de un sistema multivariable en presencia de restricciones en la entrada a la planta, se aprovecharán las propiedades de los sistemas de estructura variable y sus modos deslizantes asociados. A diferencia de las aplicaciones convencionales del CEV y los MD, los regímenes deslizantes se explotarán aquí como un modo transitorio de operación. A su vez, la señal discontinua se utilizará en un lazo auxiliar para el acondicionamiento de la señal de referencia en lugar de constituir la acción de control principal.

De manera de facilitar la comprensión del método propuesto, se describirá primero brevemente cómo opera la compensación por MD cuando es aplicada a un sistema SISO controlado por un controlador bipropio (obsérvese que los controladores P , PI y PID -realizable pertenecen a esta categoría), y se presentarán seguidamente algunas de las posibles aplicaciones. La técnica más general para la preservación del desacoplamiento dinámico en sistemas multivariariables con restricciones será formulada y analizada a partir del próximo apartado, donde también se estudiará el diseño de las superficies de deslizamiento y la dinámica resultante durante el MD.

4.3.1. Idea básica

La Figura 4.6 muestra el esquema de un sistema de control SISO al que se le agregó el acondicionamiento de la referencia propuesto para evitar que la salida del controlador exceda los límites impuestos por el actuador. $p(s)$ es la planta bajo control, la cual se supone estable. El bloque k_a representa en principio un actuador con saturación¹, aunque como se verá en las aplicaciones presentadas más adelante también podría representar una limitación interna de la planta o una llave de conmutación. $c(s)$ es un controlador lineal bipropio, mientras que $f(s)$ es un filtro de primer orden (que podría ser parte de un controlador de 2 grados de libertad). La dinámica de este filtro lineal, cuyo propósito es *suavizar* la referencia condicionada r_f , se diseña mucho más rápida que la correspondiente al lazo cerrado de forma que la respuesta del sistema no se vea afectada durante la operación lineal de los actuadores.

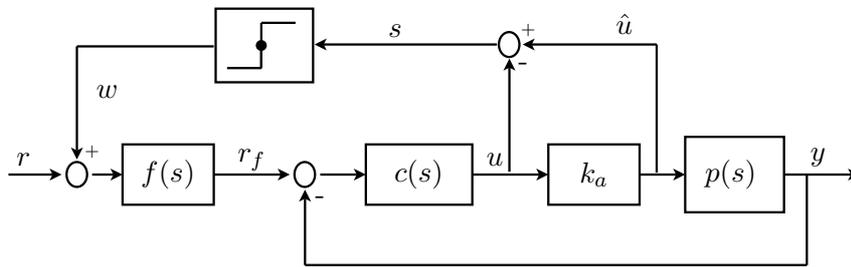


Figura 4.6: Acondionamiento de la referencia por MD para sistemas SISO y controladores bipropios

Supóngase que el límite inferior del actuador k_a es \underline{u} y el superior \bar{u} . Luego, para evitar sobrepasar estos límites se implementa la siguiente ley de conmutación en el bloque de conmutación:

$$\begin{cases} w = w^- & \text{si } s < 0 \\ w = 0 & \text{si } s = 0 \\ w = w^+ & \text{si } s > 0 \end{cases} \quad (4.9)$$

donde:

$$s = \hat{u} - u, \quad (4.10)$$

siendo u la salida del controlador y \hat{u} la entrada a la planta.

El objetivo de (4.9) y (4.10) es forzar la condición (3.4) para el establecimiento de un régimen deslizante, es decir

$$\begin{cases} \lim_{s \rightarrow 0^+} \dot{s} < 0 \\ \lim_{s \rightarrow 0^-} \dot{s} > 0 \end{cases} \quad (4.11)$$

¹Si bien aquí se considerará como única restricción del actuador la saturación en amplitud, la propuesta es perfectamente aplicable a limitaciones sobre las derivadas $u^{(j)}$ de la acción de control. Véase como ejemplo Mantz *et al.* (2004)

Sin embargo, a diferencia del CEV convencional, la presente ley de conmutación no conduce a un MD sobre la superficie $s \equiv 0$, sino que da lugar a una banda o región lineal delimitada por dos superficies de deslizamiento:

$$\begin{aligned}\bar{s} &= \bar{u} - u = 0 \\ \underline{s} &= \underline{u} - u = 0.\end{aligned}\tag{4.12}$$

En efecto, de acuerdo con (4.9) y (4.10), cuando el actuador opera en su zona lineal ($\underline{u} < u < \bar{u}$) la señal w es cero y no se realiza ninguna corrección sobre la referencia. O sea, el lazo de acondicionamiento está inactivo.

En cambio, cuando u intenta superar su límite superior, se verifica instantáneamente que $s < 0$, por lo que la señal w cambia a w^- y regresa a la acción de control u a su región lineal (donde w vuelve a ser igual a cero). Análogamente, cuando u cae por debajo de su límite inferior, haciendo $s > 0$, w conmuta a w^+ hasta que u regresa a la región permitida. En la medida que las trayectorias del sistema continúen intentando violar las restricciones en la entrada a la planta, la señal w conmutará entre 0 y w^- (o w^+) a alta frecuencia y se establecerá un regimen deslizante sobre la superficie $\bar{s} = 0$ (o $\underline{s} = 0$). Como consecuencia de este MD transitorio, la referencia filtrada será ajustada continuamente de forma tal que la salida del controlador nunca supere los límites del actuador.

Nótese que debido a que el filtro $f(s)$ es de primer orden y el controlador $c(s)$ es bipropio, las funciones de conmutación triviales (4.10) tienen grado relativo unitario respecto a w , que según se vio en el Capítulo 3 es una condición necesaria para el establecimiento del MD (Sira-Ramírez, 1989). Por el contrario, si el controlador $c(s)$ fuese estrictamente propio se deberían considerar estados adicionales del controlador en las funciones de conmutación de manera de garantizar el cumplimiento de esta condición necesaria.

Los valores w^+ y w^- tienen que ser suficientes para redireccionar las trayectorias del sistema hacia el interior de la región lineal, esto es, deben asegurar (4.11).

Asumiendo $w^- < 0 < w^+$ (esta elección tiene que ver con el signo de las ganancias del controlador), (4.11) se satisfará siempre que $w^- \leq w_{eq} \leq w^+$, donde el control continuo equivalente w_{eq} puede obtenerse derivando (4.10) una vez con respecto al tiempo e igualando a cero (o sea, a partir de la condición de invarianza (3.24)). No obstante, como la señal discontinua w se utiliza aquí para moldear la señal de referencia, en general es suficiente tomar valores del orden de las variaciones en la referencia para w^+ y w^- .

Comentario 4.1 *Es importante notar que la selección de w^+ y w^- puede hacerse en forma conservativa, ya que el regimen deslizante se restringe a la etapa de baja potencia del sistema de control. De hecho, w^+ y w^- podrían representar sólo números en una algoritmo de un microprocesador, si el control fuese digital. En el caso de controladores analógicos, por tratarse de la etapa de baja potencia la señal discontinua podría implementarse fácilmente mediante dispositivos electrónicos que operen a alta frecuencia.*

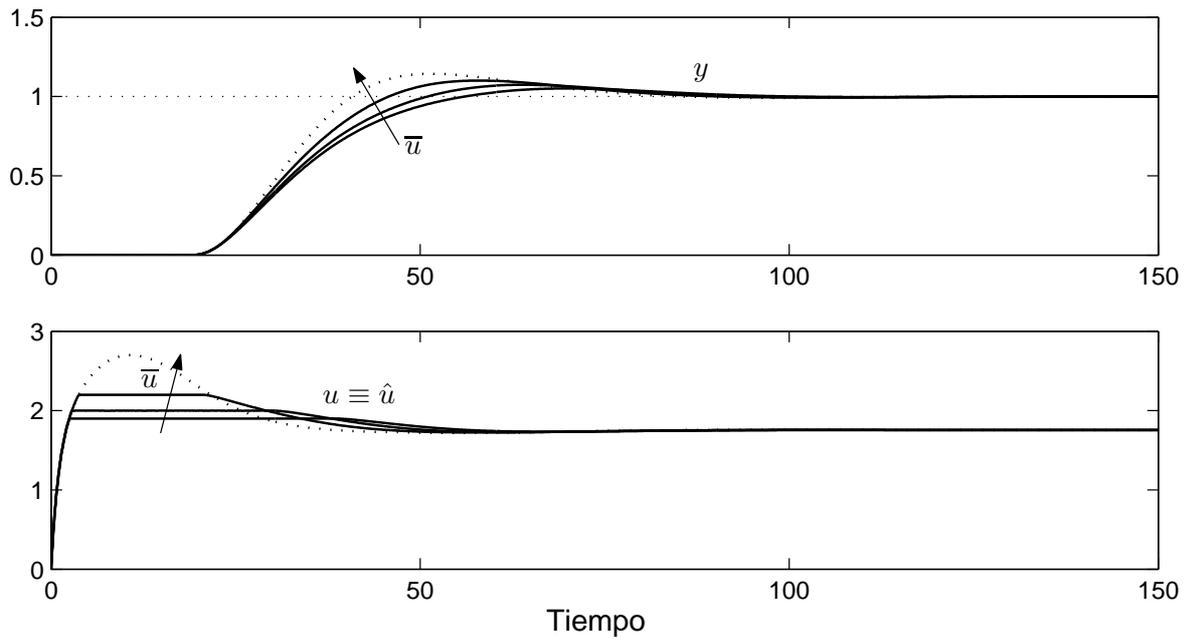


Figura 4.7: Variable controlada y acción de control para distintos valores de \bar{u} en el sistema SISO con acondicionamiento por MD

4.3.2. Aplicación 1: estrategia *anti-windup*

Retomemos el Ejemplo 4.1 de la columna de destilación con saturación de entrada. Para evitar el windup, se implementa el acondicionamiento de la referencia por modo deslizante de la Figura 4.6.

El autovalor del filtro $f(s)$ se elige en $\lambda = 1$, lo que corresponde a una constante de tiempo mucho más rápida que la del lazo cerrado. La señal de conmutación w conmuta de acuerdo a (4.9)-(4.10). Obsérvese que la función de conmutación (4.10) será de grado relativo uno respecto a w , ya que el error e (cuya derivada depende de w por ser $f(s)$ de primer orden) está implícito en u a través del término proporcional del controlador PI.

La respuesta del lazo cerrado con el acondicionamiento por MD de la referencia como método anti-windup se presenta en la Figura 4.7 para los mismos límites de amplitud que se consideraron en el Ejemplo 4.1. La evolución de la acción de control confirma que siempre $u \equiv \hat{u}$, es decir, que el actuador nunca satura. Por otro lado, la respuesta en la variable controlada y mejora sustancialmente respecto al caso sin compensación de windup. Las líneas punteadas muestran nuevamente las curvas del caso sin saturación.

La Figura 4.8 muestra las señales de referencia acondicionada r_f y las acciones discontinuas w correspondientes a la Figura 4.7. Como es de esperar, a medida que crece el límite en la acción de control (el nivel de saturación \bar{u} se hace menos exigente), la referencia acondicionada tiende a la señal de referencia original.

Por último, en la Figura 4.9 se grafican la evolución temporal de u e y y las trayectorias del sistema en el plano (u, x_i) para el caso $\bar{u} = 2$, siendo x_i el estado integral del controlador

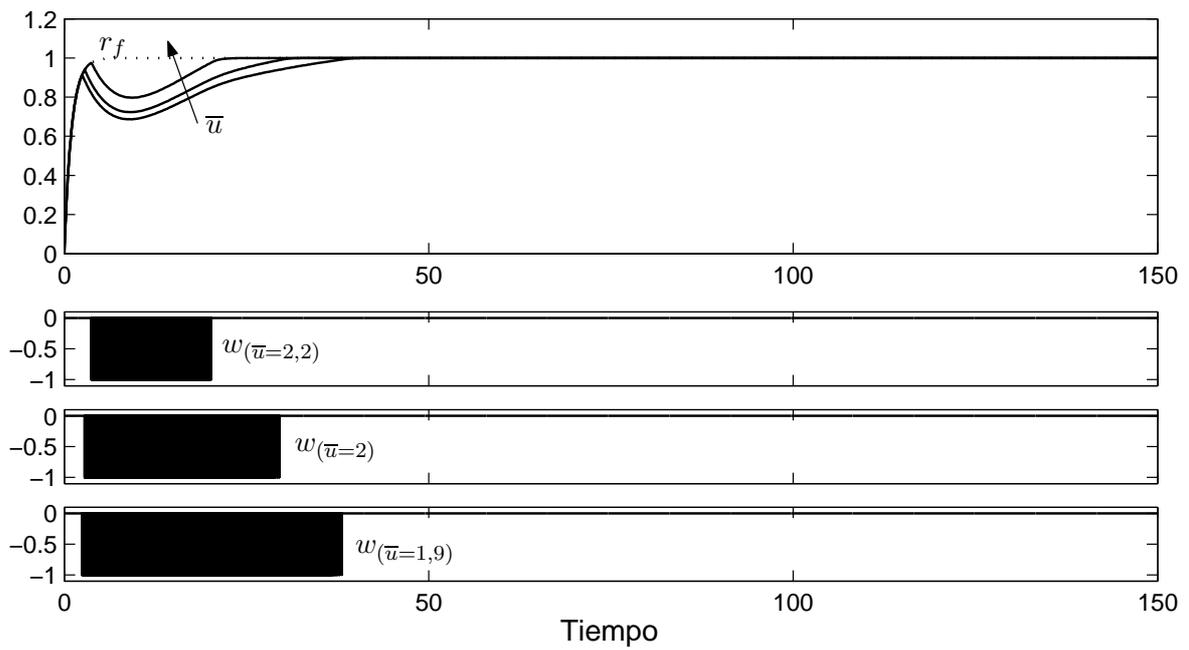


Figura 4.8: Referencia filtrada y acción discontinua correspondientes a la Figura 4.7

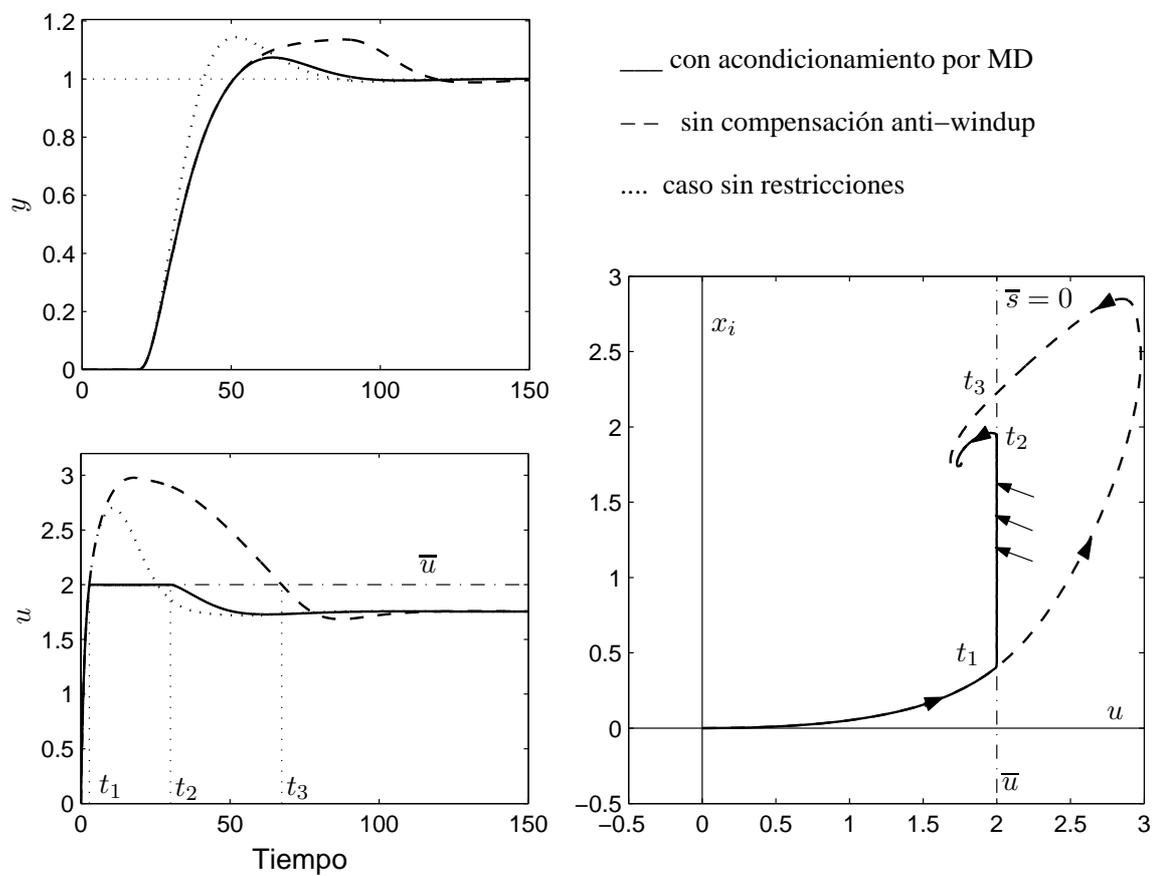


Figura 4.9: Evolución de u y y y trayectorias del sistema en el plano (u, x_i) para el caso $\bar{u} = 2$

PI. En ausencia de compensación de windup, la señal de control u entra en la región de saturación en el instante t_1 , regresando a la operación lineal recién a partir del instante t_3 . En este período se observa un importante crecimiento del estado integral x_i típico del windup, que provoca un largo sobrepaso en la variable controlada y . La trayectoria del sistema con la compensación por MD coincide con la anterior hasta el instante t_1 . A partir de entonces, el lazo de acondicionamiento produce un cambio abrupto en la dirección de las trayectorias por medio de la acción discontinua w , que fuerza a la acción de control a regresar a la región lineal. Esta situación se repite a alta frecuencia, estableciéndose un regimen deslizante sobre la superficie $\bar{s} = 0$. En t_2 , la trayectoria del sistema deja de apuntar hacia afuera de la región lineal, por lo que se inactiva el lazo de corrección (se termina el MD) y el sistema evoluciona sin compensación hacia el punto de equilibrio.

4.3.3. Aplicación 2: estrategia *bumpless*

En el control automático de procesos, sobre todo en la industria química, es frecuente que los procesos sean llevados hasta el punto de operación en forma manual, y que recién entonces se conecte el controlador para que el sistema comience a operar en forma automática. Sino se toma alguna acción para evitarlo, esta conmutación de modo manual a automático puede dar lugar a saltos en la acción de control y grandes transitorios en la variable controlada. Las estrategias que evitan estos saltos en la acción de control al cerrar el lazo de realimentación se conocen como estrategias o algoritmos *bumpless*.

El problema de la conmutación del modo manual al automático es abordado usualmente con técnicas similares a las utilizadas para evitar el *windup*. Por ello, aquí se propone utilizar el acondicionamiento de la referencia por MD como una estrategia *bumpless*.

Sea nuevamente la columna de destilación con el conjunto PI-Predictor de Smith del Ejemplo 4.1. A los efectos de evaluar el algoritmo propuesto, se supone que el controlador PI fue diseñado para operar en torno al valor unitario de la variable controlada. Luego, el proceso se conduce manualmente hasta que y alcanza el 90 % de su set-point ($y = 0,9$), instante en el cual se cierra el lazo de control.

La estructura del sistema de control manual/automático con el acondicionamiento de la referencia incorporado se presenta en la Figura 4.10. En ella, se consideró que el predictor de Smith es parte integrante del proceso. Si ello no fuese así, el mismo podría ser parte del controlador, en cuyo caso la llave de conmutación debería estar ubicada en el punto A de la Figura 4.10. Cabe mencionar que el método fue probado en ambos casos, obteniéndose resultados muy similares. A continuación se presentan las simulaciones correspondientes a la estructura de la Figura 4.10 (es decir, en la que se considera que la planta incluye al predictor) por tratarse del caso en que se producen discontinuidades de mayor amplitud en la entrada a la planta.

En la Figura 4.11 se muestran los resultados obtenidos al conmutar del modo manual al modo automático sin la compensación por MD. Como puede apreciarse, durante la operación manual del proceso la salida del controlador (u) crece muy por encima de la acción de control manipulada manualmente (u_m). Esto da lugar a un salto en la entrada a la planta (\hat{u}) al momento de la conmutación al modo automático, lo que provoca a su vez un prolongado transitorio en la variable controlada.

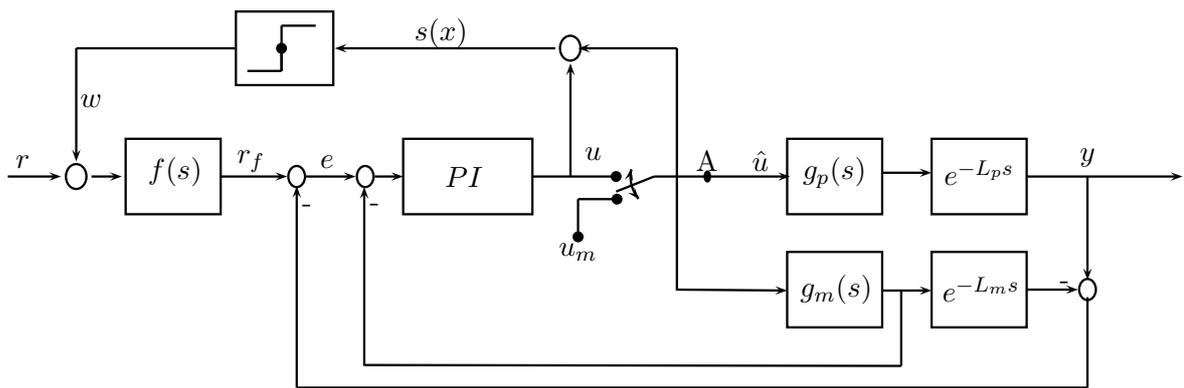


Figura 4.10: Aplicación del acondicionamiento por MD como estrategia *bumpless* para el sistema del Ejemplo 4.1.

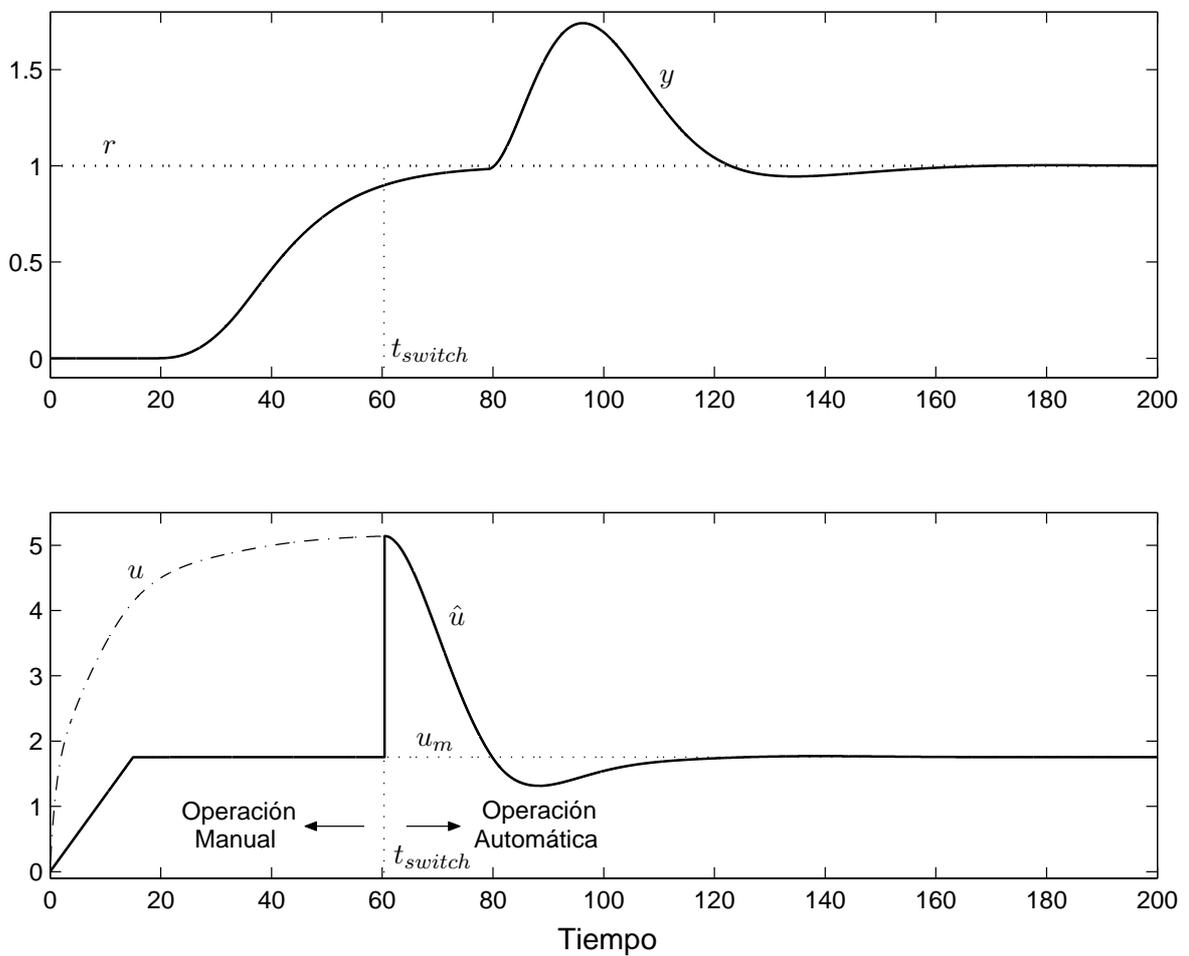


Figura 4.11: Salto en la acción de control y transitorio en variable controlada al conmutar del modo manual al automático

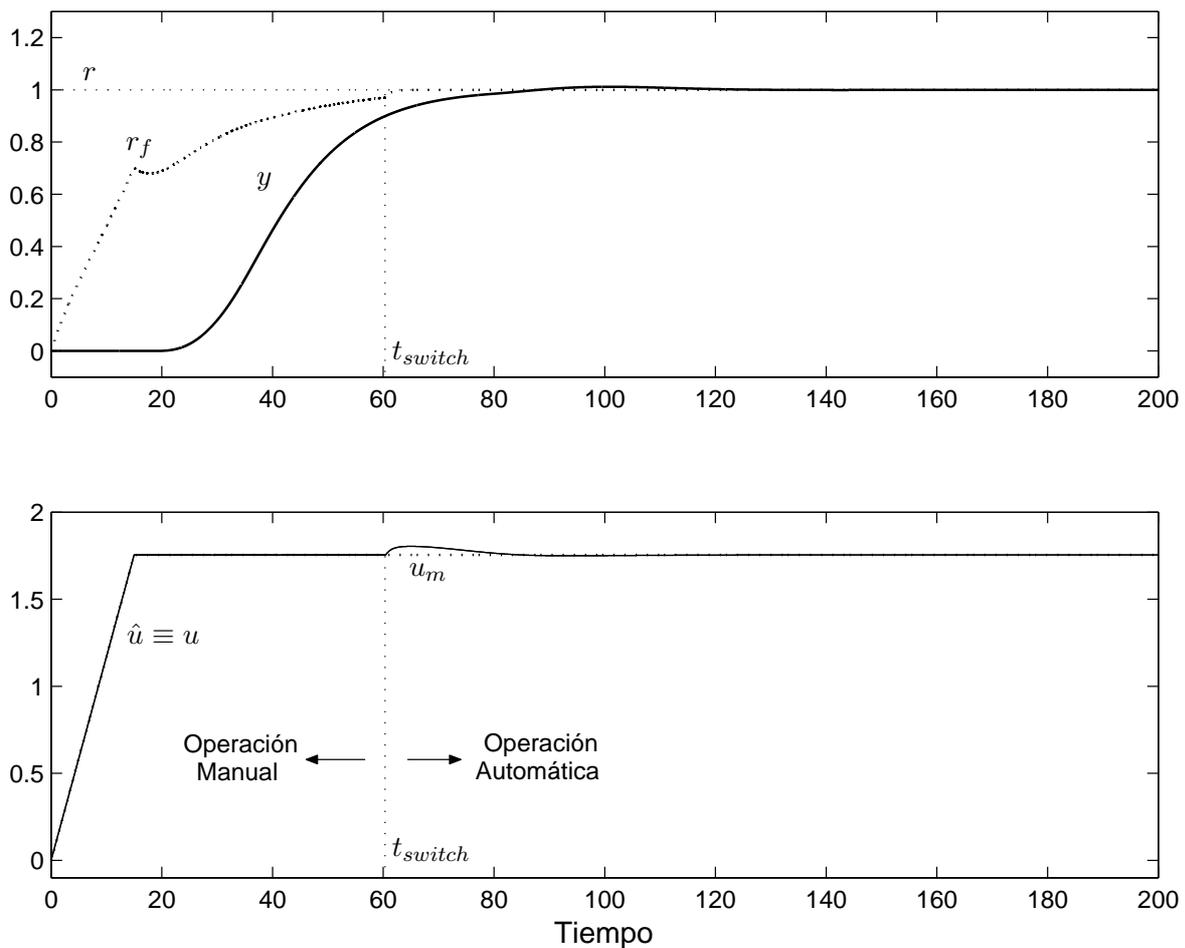


Figura 4.12: Transferencia *bumpless* mediante el acondicionamiento del *set-point* por MD

El acondicionamiento por MD (con el mismo filtro y valores de w^\pm que en la subsección anterior) modifica el *set-point* de la variable controlada de forma tal que la salida del controlador coincida en todo instante con la entrada a la planta ($u \equiv \hat{u}$), tal como se aprecia en la Figura 4.12. De esta manera, el establecimiento de un régimen deslizante sobre la superficie $s(x) = \hat{u} - u = 0$ evita el salto en la entrada a la planta al momento de la conmutación. Al cambiarse la llave de posición, la salida del controlador pasa a ser directamente la entrada a la planta, por lo que a partir de entonces $w = 0$, quedando el lazo de compensación inactivo. Luego de la conmutación al modo automático (en t_{switch}), el sistema responde con la dinámica del lazo cerrado al escalón remanente de amplitud 0,1. Como resultado de la aplicación del método, se eliminan los efectos transitorios indeseados en la variable controlada y .

Comentario 4.2 Como la entrada a la planta es la misma hasta el momento de la conmutación t_{switch} se adicione o no la compensación por MD, la evolución de la variable controlada y coincide en ambas figuras hasta $t_{switch} + L_p$ (L_p es el retardo de la planta).

Cabe mencionar aquí que si bien la aplicación del acondicionamiento por MD como algoritmo *bumpless* se puede extender a procesos multivariables, para este tipo de sistemas se ha evaluado una estrategia basada en los observadores por MD presentados en el Capítulo

3. Este método basado en observadores es aplicable a una gran cantidad de controladores, incluidos aquellos con ceros en el SPD. Además, los resultados obtenidos por simulación revelan características interesantes de los observadores por MD para este problema práctico en particular. Esta propuesta ha sido publicada en (Garelli *et al.*, 2006a), y se presenta en el Apéndice A.

4.3.4. Aplicación 3: restricciones en la planta

Además de las limitaciones a la entrada o la salida de la planta, en numerosos problemas de control existen variables internas del sistema a controlar que están sujetas a restricciones, ya sea por razones de seguridad o de performance. El acondicionamiento de la referencia por MD se puede aplicar también para tratar estas restricciones presentes en el interior de las plantas bajo control.

Un ejemplo de este tipo de aplicación es la metodología publicada en (De Battista *et al.*, 2006; Mantz *et al.*, 2005b), donde el esquema visto se aplica al control de un sistema de conversión de energía eólica que alimenta un electrolizador (para producción de hidrógeno). El objetivo principal de este control es maximizar la energía capturada de la turbina eólica satisfaciendo al mismo tiempo los requerimientos para una operación eficiente del electrolizador. Para esto último, se limita la potencia del electrolizador mediante el acondicionamiento de la referencia por MD. El esquema de acondicionamiento y los resultados de simulación correspondientes se presentan en el Apéndice B.

4.4. Conservación del desacoplamiento dinámico mediante MD

4.4.1. Formulación del método para sistemas multivariables

Sobre la base de las ideas de acondicionamiento por MD de la referencia, se plantea aquí un método para mantener el desacoplamiento dinámico de sistemas estables multivariables en presencia de restricciones en los actuadores. Se considera el caso general en que los controladores son propios (bipropios o estrictamente propios).

La Figura 4.13 representa el esquema de control MIMO propuesto para evitar cambios de direccionalidad en el control al alcanzarse los límites de los actuadores. En ella se pueden distinguir un lazo principal de control por realimentación de salida y un lazo de acondicionamiento de la referencia.

En el lazo principal de control $P(s)$ representa el proceso estable a controlar de m entradas y m salidas, que puede ser de fase mínima o no. K_a son ahora m actuadores con saturación, mientras que $C(s)$ es un controlador propio centralizado de $m \times m$ diseñado para obtener el desacoplamiento dinámico completo del lazo cerrado durante la operación lineal de los actuadores K_a . $F(s)$ representa un filtro lineal de primer orden en cada canal. Las

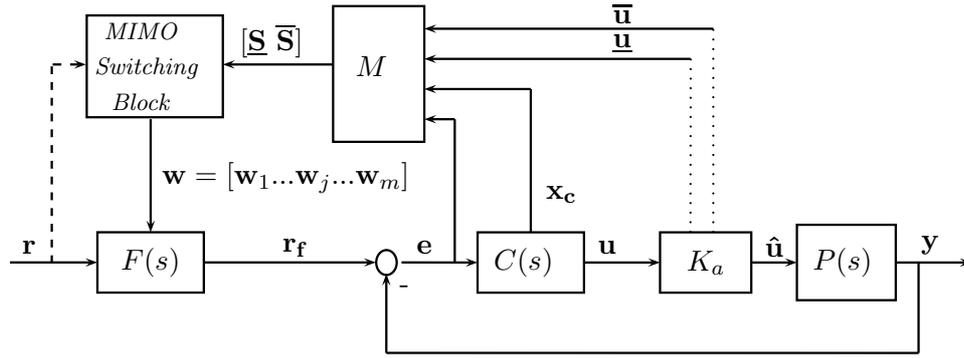


Figura 4.13: Sistema de control MIMO con lazo acondicionante por MD

señales \mathbf{r} , \mathbf{r}_f , \mathbf{e} , \mathbf{u} , $\hat{\mathbf{u}}$ e \mathbf{y} son vectores de m funciones escalares del tiempo². Los límites inferiores y superiores de los actuadores conforman los vectores constantes $\underline{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^m$ y $\overline{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^m$ respectivamente.

Individualmente, la no-linealidad introducida por el i -ésimo actuador puede ser modelada en forma sencilla como

$$k_{a_i} : \begin{cases} \hat{u}_i = \overline{u}_i & \text{si } u_i > \overline{u}_i \\ \hat{u}_i = u_i & \text{si } \underline{u}_i \leq u_i \leq \overline{u}_i \\ \hat{u}_i = \underline{u}_i & \text{si } u_i < \underline{u}_i, \end{cases} \quad (4.13)$$

con $i = 1, \dots, m$ y siendo \underline{u}_i y \overline{u}_i los elementos correspondientes de $\underline{\mathbf{u}}$ y $\overline{\mathbf{u}}$.

El lazo de acondicionamiento define para el caso MIMO dos superficies de deslizamiento para cada una de las m^2 funciones de transferencia del controlador. Esto requiere definir nuevos elementos en el lazo de compensación, lo que hace que su análisis sea relativamente más complejo que el del lazo considerado para sistemas SISO.

El bloque M representa un operador matricial constante que genera dos vectores de conmutación, $\overline{\mathbf{S}}$ y $\underline{\mathbf{S}} \in \mathbb{R}^{m^2}$, el primero conformado por las funciones de conmutación asociadas a los límites superiores de los actuadores y el segundo por las correspondientes a las cotas inferiores. Dentro de $\tilde{\mathbf{S}} = [\tilde{\mathbf{s}}_1^T \dots \tilde{\mathbf{s}}_j^T \dots \tilde{\mathbf{s}}_m^T]^T$ ($\tilde{\mathbf{x}}$ denota indistintamente a $\overline{\mathbf{x}}$ o $\underline{\mathbf{x}}$), cada $\tilde{\mathbf{s}}_j = [\tilde{s}_{1j} \dots \tilde{s}_{ij} \dots \tilde{s}_{mj}]^T$ es un vector compuesto por las funciones de conmutación encargadas de acondicionar la referencia j -ésima (notar que cada \tilde{s}_{ij} proviene de un actuador k_{a_i} distinto).

Para preservar la dirección del vector de control en presencia de restricciones, el vector discontinuo $\mathbf{w} = [\mathbf{w}_1^T \dots \mathbf{w}_j^T \dots \mathbf{w}_m^T]^T \in \mathbb{R}^{m^2}$, dentro del cual cada $\mathbf{w}_j = [w_{1j} \dots w_{ij} \dots w_{mj}]^T \in \mathbb{R}^m$ contiene las señales discontinuas que acondicionan la referencia j -ésima, es gobernado por la siguiente ley de conmutación (implementada en el *MIMO switching block*):

$$\begin{cases} w_{ij} = w_{ij}^- & \text{si } \overline{s_{ij}} < 0 \\ w_{ij} = w_{ij}^+ & \text{si } \underline{s_{ij}} > 0 \\ w_{ij} = 0 & \text{cualquier otro caso} \end{cases}, \quad i = 1, \dots, m; \quad j = j_0, \quad (4.14)$$

²En este capítulo se utilizarán letras en negrita para representar vectores de señales, de forma de distinguirlos de las señales escalares del punto anterior.

mientras que $w_{ij} = 0$ si $j \neq j_0$, siendo r_{j_0} la referencia que ha sido modificada. Obsérvese que cada una de las señales $w_{ij_0} \in \mathbf{w}_{j_0}$ consideradas en (4.14) se corresponde con uno de los m actuadores que pueden saturar.

Comentario 4.3 *Como se puede apreciar, aquí la ley de conmutación depende explícitamente de dos funciones de conmutación ($\overline{s_{ij}}$ y $\underline{s_{ij}}$), a diferencia del caso SISO, en que una sola función de conmutación daba lugar a dos superficies de deslizamiento. Esta diferencia en la definición es necesaria debido a que ahora las transferencias del controlador pueden ser estrictamente propias, en cuyo caso las funciones de conmutación incluirán sucesivas derivadas de la acción de control, tal como veremos a continuación.*

4.4.2. Diseño de las superficies

De acuerdo a lo visto en la sección 3.8.2, si se quiere controlar una salida de grado relativo mayor que uno la superficie deberá contener tantas derivadas de esa salida como sea necesario para que la superficie tenga grado relativo unitario respecto a la acción discontinua.

Efectivamente, para funciones de transferencia del controlador estrictamente propias, la versión multivariable de la función de conmutación trivial (4.10) tiene grado relativo mayor que uno con respecto a \mathbf{w} . Por tanto, las funciones de deslizamiento deberán incluir otros estados del controlador para permitir el establecimiento de regímenes deslizantes. Las funciones de deslizamiento son entonces reformuladas en la forma de (3.92) para el caso lineal, y con el objetivo de que u tienda a \overline{u} o \underline{u} una vez establecido el MD. De esta manera, se proponen las siguientes funciones de conmutación:

$$\tilde{s}_{ij} = \tilde{u}_i - u_i, \quad \text{si } \rho_{ij} = 0 \quad (4.15)$$

$$\tilde{s}_{ij} = \tilde{u}_i - u_i - \sum_{\alpha=1}^{\rho_{ij}} k_{\alpha+1}^{ij} u_i^{(\alpha)}, \quad \text{si } \rho_{ij} \geq 1 \quad i, j = 1, \dots, m; \quad (4.16)$$

donde ρ_{ij} es el grado relativo de la función de transferencia entre la salida del controlador u_i y la entrada e_j , $u_i^{(\alpha)}$ es la derivada de orden α de u_i , y $k_{\alpha+1}^{ij}$ son ganancias constantes.

Es importante remarcar que para generar $u_i^{(\alpha)}$ en (4.16) no se necesita derivar la salida del controlador, sino que las mismas pueden obtenerse como una combinación lineal de los estados y las entradas del controlador, que obviamente son accesibles.

La inclusión de $u_i^{(\rho_{ij})}$ garantiza en este caso que las funciones de deslizamiento sean de grado relativo uno respecto a \mathbf{w}_j . Esta propiedad puede verificarse fácilmente, ya que $u_i^{(\rho_{ij})}$ es proporcional a $e_j = r_{f_j} - y_j$, y \dot{e}_j depende de \mathbf{w}_j por ser $F(s)$ un filtro de primer orden en cada canal.

Las leyes establecidas por (4.14) y (4.15)-(4.16) llevan a que el régimen deslizante se establezca en forma transitoria sobre las superficies $\tilde{\mathbf{S}} = 0 \in \mathbb{R}^{m^2}$ para acondicionar la señal de referencia y evitar que las salidas del controlador crucen sus respectivos límites. En el caso en que $\rho_{ij} \neq 0$, las derivadas de la salida del controlador u_i son tenidas en cuenta para decidir la conmutación. Por ejemplo, para $\rho_{ij} = 1$ la ley (4.16) considera además de la amplitud, la

velocidad con que u_i se aproxima a su límite. Seguidamente veremos que si bien las funciones de conmutación (4.16) son en principio menos intuitivas que (4.15), las primeras tienen como ventaja que permiten fijar la velocidad con que la salida del controlador se aproxima al límite de saturación.

4.4.3. Dinámica del modo deslizante

El filtro $F(s)$ puede representarse en variables de estado como

$$F(s) : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_f &= A_f \mathbf{x}_f + B_f \mathbf{r} + B_w \mathbf{w} \\ \mathbf{r}_f &= C_f \mathbf{x}_f, \end{cases} \quad (4.17)$$

donde $A_f = -C_f = \lambda_f I_m$ (λ_f autovalor), $B_f = I_m$ y B_w matriz diagonal a bloques unitarios (de $1 \times m$) con dimensión $m \times m^2$.

Considere también la siguiente realización por columnas (Chen, 1999) del controlador $C(s)$

$$C(s) : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_c &= A_c \mathbf{x}_c + B_c \mathbf{e} \\ \mathbf{u} &= C_c \mathbf{x}_c + D_c \mathbf{e}, \end{cases} \quad (4.18)$$

en la que $A_c = \text{diag}(A_j)$, $B_c = \text{diag}(\mathbf{b}_j)$, $C_c = [C_1 \dots C_m]$ y $D_c = [\mathbf{d}_1 \dots \mathbf{d}_m]$, con $j=1, \dots, m$. A_j y C_j son matrices de $r_{d_j} \times r_{d_j}$ y $m \times r_{d_j}$ respectivamente, siendo r_{d_j} el grado del mínimo común denominador de las funciones de transferencia de la columna j de $C(s)$. Además, \mathbf{b}_j y \mathbf{d}_j son vectores columna de r_{d_j} y m elementos, respectivamente. Así, $(A_j, \mathbf{b}_j, C_j, \mathbf{d}_j)$ es una realización del vector de transferencias entre el error e_j y las salidas del controlador \mathbf{u} . Tomando ahora la fila i de C_j y el elemento i de \mathbf{d}_j (denominados \mathbf{c}_{ij} y d_{ij} respectivamente), obtenemos una realización de la función de transferencia entre e_j y la salida i -ésima del controlador, u_i :

$$c_{ij}(s) : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_{c_j} &= A_j \mathbf{x}_{c_j} + \mathbf{b}_j e_j \\ u_i &= \mathbf{c}_{ij} \mathbf{x}_{c_j} + d_{ij} e_j. \end{cases} \quad (4.19)$$

Tal como se argumentó en la introducción, se consideran cambios individuales de las componentes del vector de referencias, ya que esta forma de operación es muy utilizada en diseños desacoplados y permite obtener un mayor grado de desacoplamiento en presencia de restricciones en la entrada a la planta. Luego, y de acuerdo con (4.14), el lazo de corrección por MD moldea únicamente a la referencia que cambió por última vez, que llamaremos a partir de aquí r_j en lugar de r_{j_0} para simplificar la notación. Consecuentemente, cada vez que el sistema esté por alcanzar la saturación en la i -ésima componente del vector de control \mathbf{u} , la compensación por MD operará sobre la función transferencia $c_{ij}(s)$, tal como refleja la Figura 4.14. Las otras componentes del error \mathbf{e} no afectan el lazo de compensación dado que permanecen constantes por estar el sistema desacoplado.

De esta manera, la dinámica de lazo abierto del lazo de prevención por MD cuando un cambio en la referencia r_j lleva la salida del controlador u_i cerca de su valor límite viene dada a partir de (4.17) y (4.19) por:

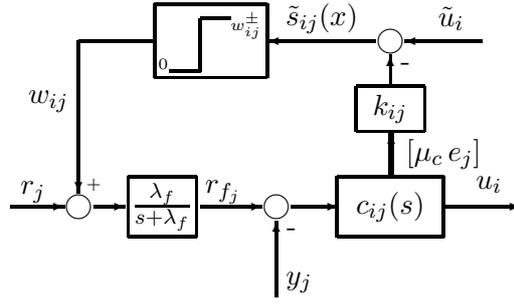


Figura 4.14: Lazo de acondicionamiento activo cuando se alcanza un límite \tilde{u}_i debido a un cambio en r_j .

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_{c_j} \\ \dot{e}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_j & \mathbf{b}_j \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{c_j} \\ e_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{c}_{f_j} A_f \mathbf{x}_f + \mathbf{c}_{f_j} B_f \mathbf{r} - \dot{y}_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{c}_{f_j} B_w \mathbf{w} \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

$$u_i = \mathbf{c}_{ij} \mathbf{x}_{c_j} + d_{ij} e_j, \quad (4.21)$$

donde \mathbf{c}_{f_j} es la fila j de C_f , y por ende $\mathbf{c}_{f_j} B_f \mathbf{r} = -\lambda_f r_j$ y $\mathbf{c}_{f_j} B_w \mathbf{w} = -\lambda_f [1 \dots 1] \mathbf{w}_j$.

Transferencias $c_{ij}(s)$ bipropias

Si $c_{ij}(s)$ es bipropia ($\rho_{ij} = 0$, $d_{ij} \neq 0$), durante el MD tenemos

$$e_j = d_{ij}^{-1} (\tilde{u}_i - \mathbf{c}_{ij} \mathbf{x}_{c_j}), \quad (4.22)$$

que resulta de despejar e_j en (4.21) e igualar (4.15) a cero. Luego, la última fila de (4.20) se vuelve redundante. Reemplazando (4.22) en las primeras r_{d_j} filas de (4.20), se llega a la siguiente dinámica del modo deslizante

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_{c_j} &= Q_{c0} \mathbf{x}_{c_j} + \mathbf{b}_j d_{ij}^{-1} \tilde{u}_i, \\ Q_{c0} &= (A_j - \mathbf{b}_j d_{ij}^{-1} \mathbf{c}_{ij}), \end{aligned} \quad (4.23)$$

donde los autovalores de Q_{c0} resultan ser los ceros de $c_{ij}(s)$. Consecuentemente, siempre que la función de transferencia bipropia involucrada en el lazo de compensación sea de fase mínima, la dinámica del MD será estable. Obsérvese que esta dinámica depende únicamente de los parámetros del controlador, y que no es vista desde la salida del controlador ya que $u_i = \tilde{u}_i$ durante el régimen deslizante.

Transferencias $c_{ij}(s)$ estrictamente propias

Ahora bien, para obtener la dinámica del modo deslizante correspondiente a $c_{ij}(s)$ estrictamente propias ($\rho_{ij} \geq 1$, $d_{ij} = 0$), es conveniente expresar (4.20)–(4.21) en su forma canónica normal, mediante la versión lineal de las transformaciones presentadas en la sección 3.8.1.

Reescribiendo el sistema (4.20)–(4.21) en forma compacta (con $d_{ij} = 0$):

$$\dot{\mathbf{x}} = A \mathbf{x} + \mathbf{b} w_d, \quad (4.24)$$

$$u_i = \mathbf{c} \mathbf{x}, \quad (4.25)$$

donde:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{c_j} \\ e_j \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} A_j & \mathbf{b}_j \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad w_d = \mathbf{c}_{f_j} A_f \mathbf{x}_f + \mathbf{c}_{f_j} B_f \mathbf{r} - \dot{y}_j + \mathbf{c}_{f_j} B_w \mathbf{w}, \quad \mathbf{c} = [\mathbf{c}_{ij} \ 0].$$

Identificamos en este sistema las funciones definidas para sistemas afines en el Capítulo 3:

$$f(\mathbf{x}) = A \mathbf{x},$$

$$g(\mathbf{x}) = \mathbf{b},$$

$$h(\mathbf{x}) = \mathbf{c} \mathbf{x}.$$

Luego, aplicando derivadas direccionales a la salida como en (3.73), y llamando $\rho = \rho_{ij} + 1$ al grado relativo entre u_i y w_d , se tiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_i = h(\mathbf{x}) = \mathbf{c} \mathbf{x} \\ \dot{u}_i = L_f h + L_g h w_d = \mathbf{c} A \mathbf{x} + \mathbf{c} \mathbf{b} w_d \\ \ddot{u}_i = L_f^2 h + L_g L_f h w_d = \mathbf{c} A^2 \mathbf{x} + \mathbf{c} A \mathbf{b} w_d \\ \vdots \\ u_i^{(\rho-1)} = L_f^{(\rho-1)} h + L_g L_f^{(\rho-2)} h w_d = \mathbf{c} A^{(\rho-1)} \mathbf{x} + \mathbf{c} A^{(\rho-2)} \mathbf{b} w_d \\ u_i^{(\rho)} = L_f^{(\rho)} h + L_g L_f^{(\rho-1)} h w_d = \mathbf{c} A^{(\rho)} \mathbf{x} + \mathbf{c} A^{(\rho-1)} \mathbf{b} w_d \end{array} \right. \quad (4.26)$$

Como es sabido, los segundos términos del último miembro en cada ecuación de (4.26) son los parámetros de Markov del sistema. En un sistema con grado relativo ρ , el primer término no nulo en la función de transferencia será $\mathbf{c} A^{\rho-1} \mathbf{b}$, siendo $\mathbf{c} A^k \mathbf{b} = 0$ para $0 < k < \rho - 2$. Así, únicamente la última ecuación de (4.26) dependerá explícitamente de la entrada w_d .

Por lo tanto, para transformar el sistema (4.20)–(4.21) a su forma canónica normal pero hasta encontrar la dependencia explícita respecto al estado e_j (en lugar de la entrada w_d) se aplica la siguiente transformación lineal:

$$\mathbf{z} = T \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{c} A \\ \mathbf{c} A^2 \\ \vdots \\ \mathbf{c} A^{(\rho_{ij}-1)} \\ \tau_{r+1} \\ \vdots \\ \tau_n \end{bmatrix} \mathbf{x}, \quad (4.27)$$

con $\tau_{r+1}, \dots, \tau_n$ vectores fila tales que T sea no-singular.

Finalmente, el sistema transformado

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}} &= T A T^{-1} \mathbf{z} + T \mathbf{b} w_d, \\ u_i &= \mathbf{c} T^{-1} \mathbf{z},\end{aligned}$$

para el caso considerado resulta:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = z_3 \\ \dots = \dots \\ \dot{z}_{\rho_{ij}-1} = z_{\rho_{ij}} \\ \dot{z}_{\rho_{ij}} = a_\xi \xi_c + a_\eta \eta_c + b e_j \\ \dot{\eta}_c = P_c \xi_c + Q_c \eta_c \\ \dot{e}_j = \mathbf{c}_{f_j} A_f \mathbf{x}_f + \mathbf{c}_{f_j} B_f \mathbf{r} - \dot{y}_j + \\ \quad + \mathbf{c}_{f_j} B_w \mathbf{w} = w_d \\ u_i = z_1, \end{array} \right. \quad (4.28)$$

donde $\xi_c = [z_1 \ z_2 \ \dots \ z_{\rho_{ij}}]^\top$ se compone de la salida del controlador u_i y sus primeras $(\rho_{ij} - 1)$ derivadas, η_c son $(r_{d_j} - \rho_{ij})$ estados linealmente independientes y $b \neq 0$.

Cuando el sistema se encuentra en su región lineal, el vector \mathbf{w} es nulo y el lazo de acondicionamiento se encuentra inactivo. Sin embargo, cuando una salida del controlador alcanza el límite del actuador correspondiente, se establece un MD y la última fila de (4.28) pasa a ser redundante. Efectivamente, haciendo (4.16) igual a cero la dinámica reducida del MD resulta

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = z_3 \\ \dots = \dots \\ \dot{z}_{\rho_{ij}-1} = z_{\rho_{ij}} \\ \dot{z}_{\rho_{ij}} = \left(\tilde{u}_i - u_i - \sum_{\alpha=2}^{\rho_{ij}} k_\alpha^{ij} z_\alpha \right) / k_{\rho_{ij}+1}^{ij} \\ \dot{\eta}_c = P_c \mu_c + Q_c \eta_c \\ u_i = z_1, \end{array} \right. \quad (4.29)$$

que tiene la misma estructura que la dinámica del MD hallada en (3.99)–(3.100) para sistemas en forma normal con grado relativo $\rho < n$. En esta forma, los ceros de $c_{ij}(s)$ son los autovalores de Q_c , y determinan la dinámica escondida del controlador.

Por lo tanto, cualquier transferencia del controlador $c_{ij}(s)$ (así sea bipropia o estrictamente propia) asociada a un actuador que potencialmente puede saturar, deberá ser de fase mínima para que la dinámica del MD sea estable. Nótese, sin embargo, que esta restricción sobre las transferencias individuales $c_{ij}(s)$ de la matriz de transferencia del controlador no implica que el controlador multivariable $C(s)$ o el proceso $P(s)$ deban ser de fase mínima. De hecho, según se vio en el Capítulo 2, los ceros de transmisión pueden estar en el SPD a pesar de que todas las transferencias individuales sean de fase mínima.

Como puede observarse, durante el MD la salida u_i del controlador evoluciona de acuerdo a las primeras ρ_{ij} filas de (4.29). En el dominio de Laplace, las constantes k_α^{ij} son los coeficientes del polinomio característico de la transferencia entre \tilde{u}_i y u_i . Luego, la evolución de la salida del controlador u_i depende solamente de las constantes k_α^{ij} . Si éstas se eligen adecuadamente, una vez establecido el modo deslizante la salida del controlador u_i tenderá a su valor límite \tilde{u}_i sin sobrepasarlo, con la dinámica fijada por los valores de k_α^{ij} elegidos. De este modo no existirá incongruencia entre \mathbf{u} and $\hat{\mathbf{u}}$ (coincidirán a cada instante), y se evitará entonces el windup y el cambio de dirección en el control que harían perder el desacoplamiento. Sólo cuando la acción de control vuelva por sí misma a la región de operación lineal se desactivará el lazo de corrección por MD.

Rechazo a perturbaciones

Según se ha visto en la sección 3.7 del Capítulo 3, una propiedad distintiva de los regímenes deslizantes es que los mismos no son afectados por perturbaciones colineales con la acción de control discontinua. Se dice que el MD presenta *invarianza fuerte* a este tipo de perturbaciones. En nuestro esquema de acondicionamiento, el segundo y tercer término del miembro derecho de (4.20), que pueden ser interpretados respectivamente como la perturbación y el control del lazo acondicionante, representan vectores colineales. En efecto, utilizando la notación del capítulo anterior en la ecuación (4.20)

$$g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u = \mathbf{c}_{f_j} B_w \mathbf{w}, \quad (4.30)$$

y las dos componentes de la perturbación son

$$\mu(x) = \mathbf{c}_{f_j} A_f \mathbf{x}_f + \mathbf{c}_{f_j} B_f \mathbf{r} - \dot{y}_j \quad \eta(x) = 0 \quad (4.31)$$

Por lo tanto, para el lazo de acondicionamiento $d = g(x)\mu(x)$ y se satisface la *condición vinculante* (3.52).

Luego, el MD presenta invarianza fuerte a r_j e y_j (y a las perturbaciones a la salida presentes en y_j). Esta característica interesante del método propuesto la demuestran las ecuaciones (4.23) y (4.29) que determinan la dinámica del MD. Obsérvese, no obstante, que el MD generado por la ley de conmutación (4.14) rechaza solamente aquellos cambios en r_j e y_j que lleven a u_i a intentar superar su límite. Por el contrario, si un cambio en r_j o y_j conduce a la salida del controlador hacia el interior de la región de operación lineal (lo que resulta beneficioso para el problema que se quiere solucionar), la ley de conmutación (4.14) hará $w_{ij} = 0$ y el MD terminará.

Comportamiento del sistema completo

Durante el MD, la salida del controlador u_i coincidirá con el límite \tilde{u}_i o tenderá a él con la dinámica elegida para el MD, la cuál no es afectada por el lazo principal de control debido a las propiedades de robustez mencionadas en el párrafo anterior. En realidad, el límite \tilde{u}_i actúa como entrada del lazo de acondicionamiento, mientras que u_i es su salida. Por lo tanto, la variable controlada y_j evoluciona transitoriamente (durante el MD) de acuerdo a la conexión en serie del límite \tilde{u}_i (entrada), la dinámica del acondicionamiento por MD (desde \tilde{u}_i a u_i) y la dinámica estable de la planta (desde u_i a y_j). Dado que la direccionalidad del control no cambia y que sólo se acondiciona r_{f_j} , el desacoplamiento dinámico se preserva y las demás variables controladas no se ven afectadas, por lo que tampoco ellas afectan al lazo de corrección. Luego, la dinámica de todo el sistema es estable durante la operación transitoria por MD.

Si los actuadores fueron elegidos adecuadamente para el objetivo de control, el control disponible \tilde{u}_i será suficiente para llevar a y_j cerca de su set-point r_j . Por lo tanto, como se ha explicado, las trayectorias del sistema evolucionarán naturalmente hacia la región lineal, y el lazo de compensación por MD se inactivará. Desde entonces, el sistema recuperará su dinámica original de lazo cerrado. Consecuentemente, la dinámica del sistema de control es estable tanto durante la operación por MD como en la operación normal dentro de la región lineal.

4.4.4. Comentarios Adicionales

- i) A diferencia de la mayoría de las estrategias por CEV, no existe *modo de alcance* previo a los regímenes deslizantes en la presente aplicación. Como la evolución dentro de la región de operación lineal de los actuadores es el modo de operación deseado, no se aplica esfuerzo de control para forzar al sistema a alcanzar la superficie de deslizamiento. Esta propiedad es interesante ya que las fases de alcance comúnmente degradan la respuesta global de los controladores de estructura variable (Mantz *et al.*, 2005a).
- ii) El *chattering*, que usualmente es causado por las limitaciones en la frecuencia de conmutación o por la dinámica no modelada (véase Capítulo 3), es despreciable en esta propuesta. En primer lugar, la acción discontinua se puede generar mediante una conmutación a muy alta frecuencia por aplicarse en la etapa de baja potencia del sistema, siendo además posteriormente filtrada. En segundo lugar, el grado relativo unitario de las funciones de conmutación se garantiza siempre. De hecho, el grado relativo del controlador es perfectamente conocido, y las funciones de conmutación se obtienen a partir de la realimentación de los estados del controlador, que son completamente accesibles.
- iii) El mismo análisis de esta sección es válido para sistemas triangularmente desacoplados de dos entradas y dos salidas, donde el acondicionamiento de una de las referencias se lleva a cabo a fin de preservar el desacoplamiento en la otra variable controlada. Para sistemas parcialmente desacoplados de mayor dimensión, las interacciones entre la referencia condicionada y las restantes variables acopladas deberán ser tenidas en cuenta.

4.5. Ejemplos

4.5.1. Sistema de mínima fase

Como primer ejemplo de aplicación, se retoma la planta con la que se ejemplificó el cambio direccional del vector de control (Ejemplo 4.2). La planta está dada por la matriz de transferencia (4.4), y su desacoplamiento dinámico diagonal se obtiene con el controlador expresado en (4.5). Tal como se verificó en las simulaciones realizadas, este desacoplamiento se pierde cuando cambia la dirección del vector de control debido a la saturación de entrada (Figura 4.4).

Con el fin de evaluar el método propuesto para preservar el desacoplamiento dinámico, se agregó al sistema un filtro de primer orden en la referencia como el descrito en (4.17), aún para el caso sin corrección por MD. Esto permite comparar la performance del sistema con y sin compensación por MD, descartando que las diferencias entre ambos pudieran deberse al filtro adicionado (lo que podría dar lugar a una solución conservadora). A diferencia del filtro implementado para el Ejemplo 4.2, la dinámica de este nuevo filtro se eligió 10 veces más rápida que la del lazo cerrado conformado por $P(s)$ y $C(s)$, con lo cual la respuesta del sistema no se ve afectada durante la operación en la zona lineal de los actuadores. Las matrices de la representación en variables de estado del filtro son:

$$\begin{aligned} A_f &= -10 I_2, & C_f &= 10 I_2, \\ B_f &= I_2, & B_w &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.32)$$

donde B_w sólo tendrá sentido para el sistema con el lazo de compensación, en el cual existe el vector de control discontinuo \mathbf{w} .

Para el sistema con actuadores ideales, la respuesta obtenida al excitar primero al sistema con un cambio de tipo escalón en la primera componente del vector de referencia (r_1), y luego con otro escalón de mayor amplitud en la segunda componente (r_2), se presenta en la Figura 4.15 (las diferencias respecto a las respuesta de la Figura 4.3 se deben precisamente a los distintos filtros utilizados). En ella puede verificarse la respuesta desacoplada del lazo cerrado. La parte inferior de la figura muestra la evolución temporal de las acciones de control en los dos canales.

Ahora consideramos que el sistema consta de dos actuadores iguales cuyos comportamientos lineales están comprendidos en el rango $[-12 \ 12]$ (más restrictivos aún que en el Ejemplo 4.2). En este caso la performance sufre también un serio deterioro, dando lugar a mayores sobrepasos y tiempos de establecimiento en ambos canales (Figura 4.16). Observar que, a causa de la mayor velocidad de las referencias y de los límites más exigentes en los actuadores, el desacoplamiento dinámico para el cual había sido diseñado el controlador se pierde ahora completamente. Esto último se debe a que la dirección del vector de control \mathbf{u} (línea punteada) deja de coincidir con la del vector de entrada a la planta $\hat{\mathbf{u}}$ (línea continua) ante cada cambio de set-point como consecuencia de la saturación.

Para solucionar el problema del cambio de direccionalidad del control se aplicó el método propuesto en este capítulo al controlador (4.5). En este caso, debido a que ambos actuadores

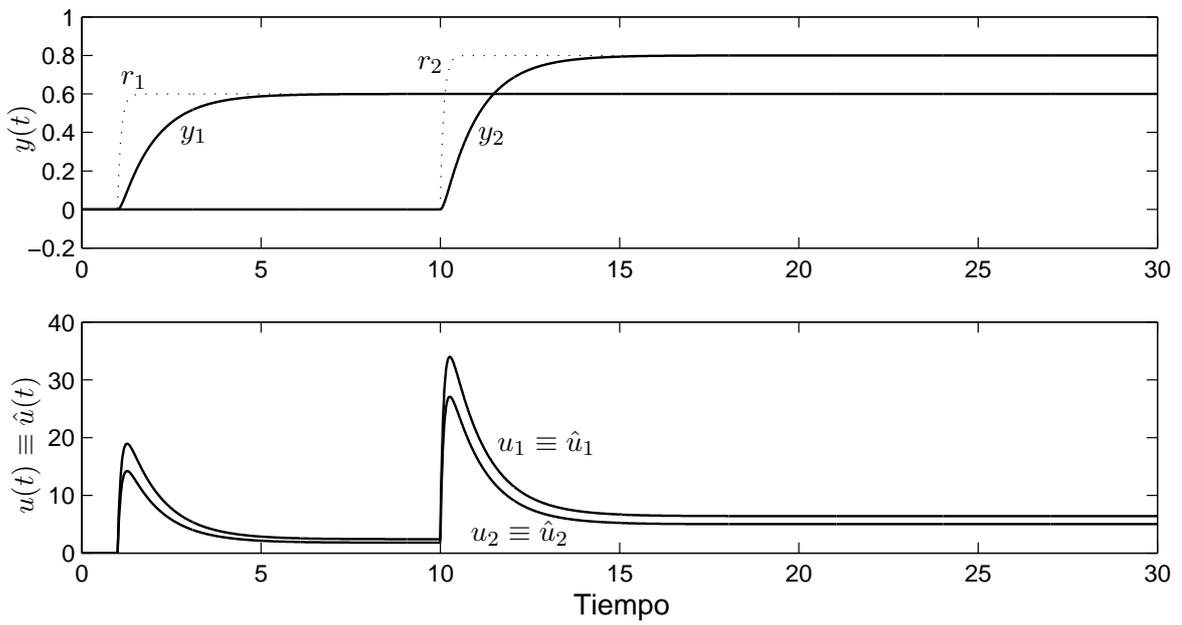


Figura 4.15: Respuesta del sistema de MF con actuadores ideales

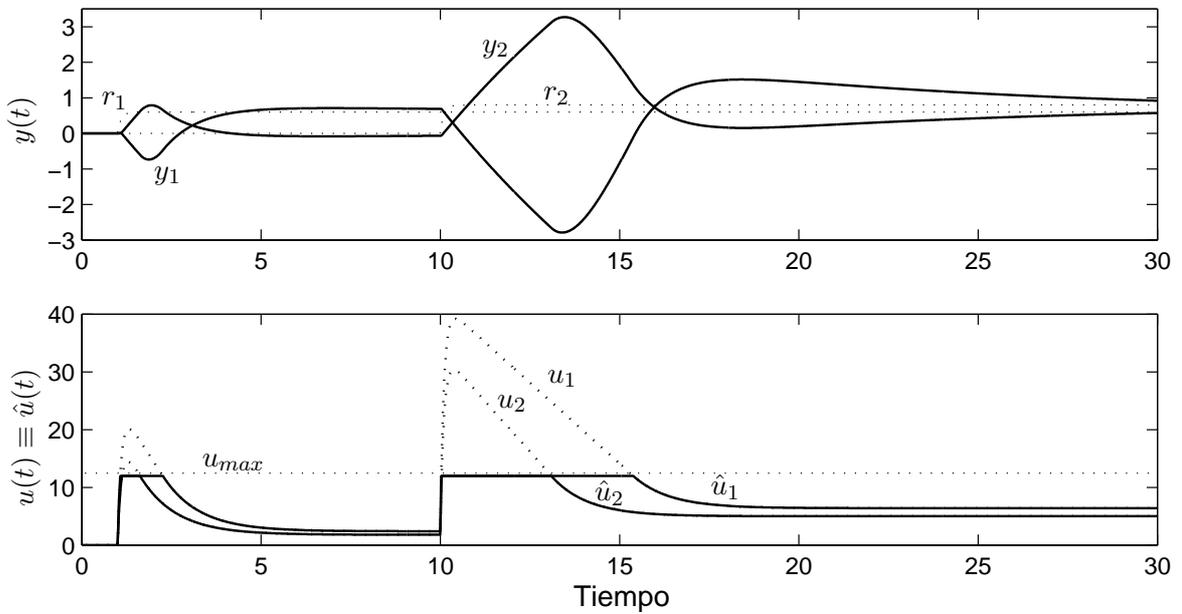


Figura 4.16: Respuesta del sistema de MF con saturación en los actuadores

tienen los mismos límites (\underline{u} y \bar{u} pueden tomarse escalares) y a que el máximo grado relativo de las transferencias del controlador es cero ($\rho_{ij} = 0$, $i, j = 1, 2$), la matriz de coeficientes constantes M se reduce a:

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.33)$$

cuya entrada es $[u_1 \ u_2 \ \underline{u} \ \bar{u}]^\top$. Nótese que las 4 primeras filas de M dan lugar a las superficies \bar{s}_{ij} , mientras que las restantes filas generan \underline{s}_{ij} . En este caso ninguna de las superficies incluye $\dot{\mathbf{u}}$ ni derivadas de orden superior por tratarse de un controlador con todas sus transferencias individuales de grado relativo nulo. Cada componente de la acción de control discontinua $\mathbf{w} = [w_{11} \ w_{21} \ w_{12} \ w_{22}]^\top$ conmuta de acuerdo con la ley de conmutación (4.14) entre $w_{ij}^- = -1$, cero y $w_{ij}^+ = 1$.

La efectividad de la propuesta basada en MD queda de manifiesto en la Figura 4.17. De hecho, las salidas del sistema se mantienen desacopladas dinámicamente con una performance más que aceptable en comparación con la obtenida con los actuadores ideales (las curvas y_1 e y_2 de la Figura 4.15 se repiten en línea a trazos). Asimismo, las salidas del controlador nunca sobrepasan los límites de los actuadores, coincidiendo a cada instante con la entrada a la planta (las curvas de u y \hat{u} se superponen en la parte inferior de la Figura 4.17).

Al cambiar la referencia r_1 y alcanzar u_1 el límite superior del primer actuador, se establece un régimen deslizante sobre la superficie $\bar{s}_{11} = 0$ entre t_1 y t_2 , lo que acondiciona la referencia r_1 de forma tal de evitar que se produzca la saturación de u_1 . Luego se vuelve a establecer MD al cambiar r_2 , esta vez sobre la superficie $\bar{s}_{12} = 0$ entre t_3 y t_4 . Obsérvese que la ley de conmutación (4.14)-(4.15) evita que se acondicione la referencia invariante en cada caso, y que la atenuación de u_2 no se debe al establecimiento de MD sobre las superficies $\bar{s}_{2j} = 0$, sino al acondicionamiento realizado sobre r_1 primero y r_2 después para evitar la saturación de u_1 .

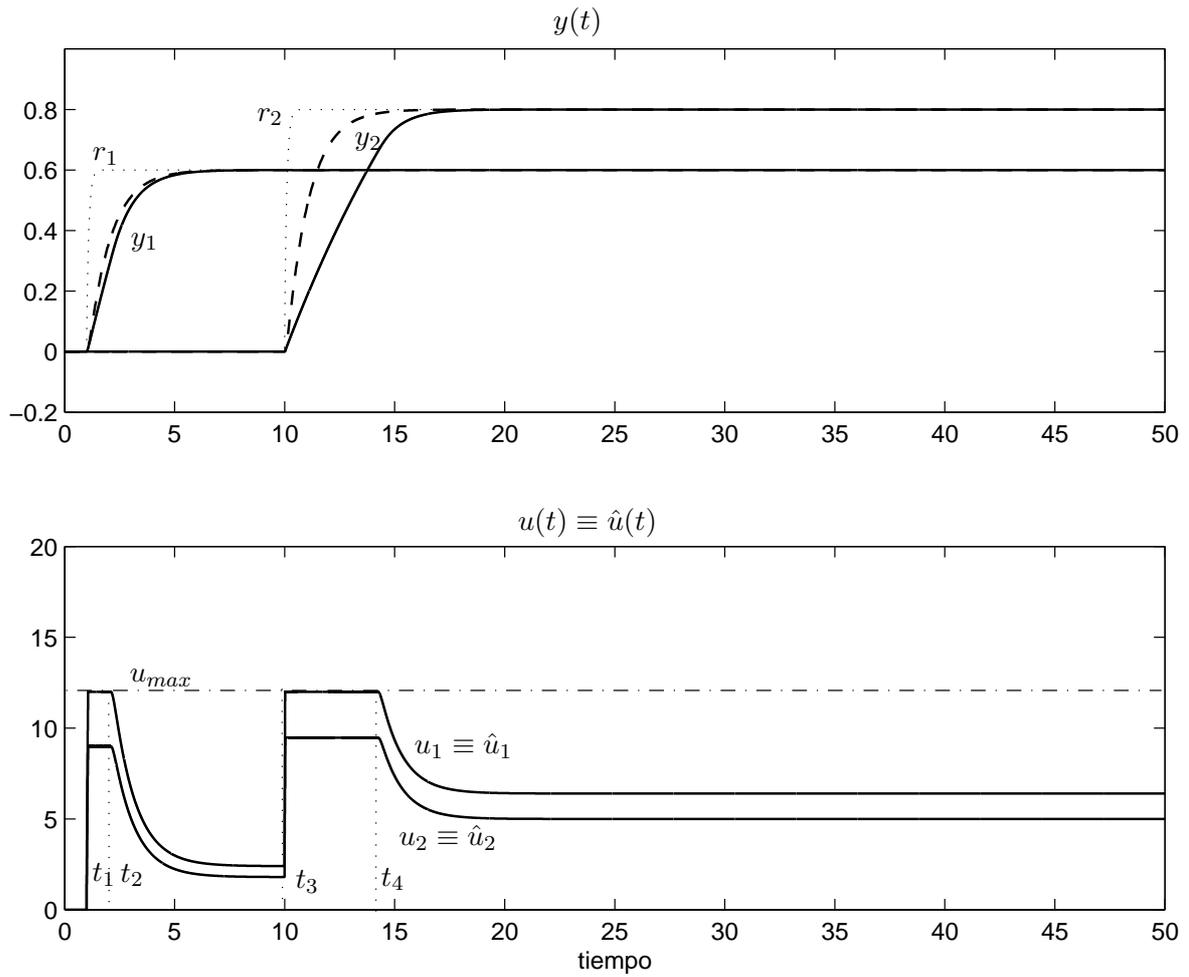


Figura 4.17: Respuesta del sistema de MF con saturación en los actuadores y acondicionamiento por MD

4.5.2. Sistema de no-mínima fase

Tomamos ahora una planta de fase no-mínima que se utiliza como ejemplo para el desacoplamiento de este tipo de sistemas en [Goodwin *et al.* \(2001\)](#). La matriz de transferencia de la planta es la siguiente

$$P(s) = \frac{1}{(s+1)^2} \begin{bmatrix} s+2 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.34)$$

Fácilmente se puede verificar que $P(s)$ tiene un cero de transmisión en $s=4$. Entonces, para sintetizar un controlador que logre el desacoplamiento dinámico del lazo cerrado se deben seguir las ideas presentadas en la sección 2.3.2 del Capítulo 2.

Suponemos que el objetivo es obtener la siguiente sensibilidad complementaria a lazo cerrado

$$T(s) = \frac{-9(s-4)}{4(s^2+4s+9)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{10}{s+10} \end{bmatrix}, \quad (4.35)$$

la cual se consigue con el siguiente controlador centralizado:

$$C(s) = \frac{-9(s+1)^2}{4s} \begin{bmatrix} 1/(s+6,25) & 30/(s^2+14s+71,5) \\ 2/(s+6,25) & 10(s+2)/(s^2+14s+71,5) \end{bmatrix}. \quad (4.36)$$

Nuevamente se agrega un filtro al sistema para evaluar el método propuesto. Las matrices de la representación en el espacio de estados del filtro correspondiente son:

$$\begin{aligned} A_f &= -20 \cdot I_2, & C_f &= 20 \cdot I_2, \\ B_f &= I_2, & B_w &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Al sistema con actuadores ideales se le aplicó primero un escalón positivo en r_1 , y luego un escalón negativo de igual magnitud en r_2 . La respuesta a ese estímulo se muestra mediante las líneas punteadas de la Figura 4.18, donde se puede verificar el desacoplamiento dinámico del lazo cerrado. El comportamiento de no-mínima fase en ambos canales es el precio a pagar por el desacoplamiento, que tal como se ha analizado depende de los polos y ceros en el semi-plano derecho.

Como es de esperar, al tomar dos actuadores con límites $u_{max} = \bar{u}_1 = \bar{u}_2 = 2$ y $u_{min} = \underline{u}_1 = \underline{u}_2 = -2$, la performance se degrada notoriamente (curvas continuas de la Figura 4.18). Aparecen aquí también, además de tiempos de establecimiento mayores, fuertes interacciones cruzadas por la pérdida de la dirección necesaria en el control para desacoplar el sistema.

Para atenuar el deterioro de performance causado por la saturación de entrada, se adiciona al diseño anterior la compensación por MD propuesta. Para este ejemplo, la matriz implementada en el bloque M (sin considerar la transformación necesaria para obtener las derivadas a partir de los estados) viene dada por:

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -0,02 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -0,02 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.38)$$

donde el vector de entrada es ahora $[u_1 \ u_2 \ \dot{u}_1 \ \dot{u}_2 \ u_{min} \ u_{max}]^T$. Para este ejemplo se tomó $w_{ij}^- = 1$ y $w_{ij}^+ = -1$ (estos valores “invertidos” están relacionados con las ganancias negativas de las funciones de transferencia de $C(s)$). Obsérvese que en este caso sólo s_{12}

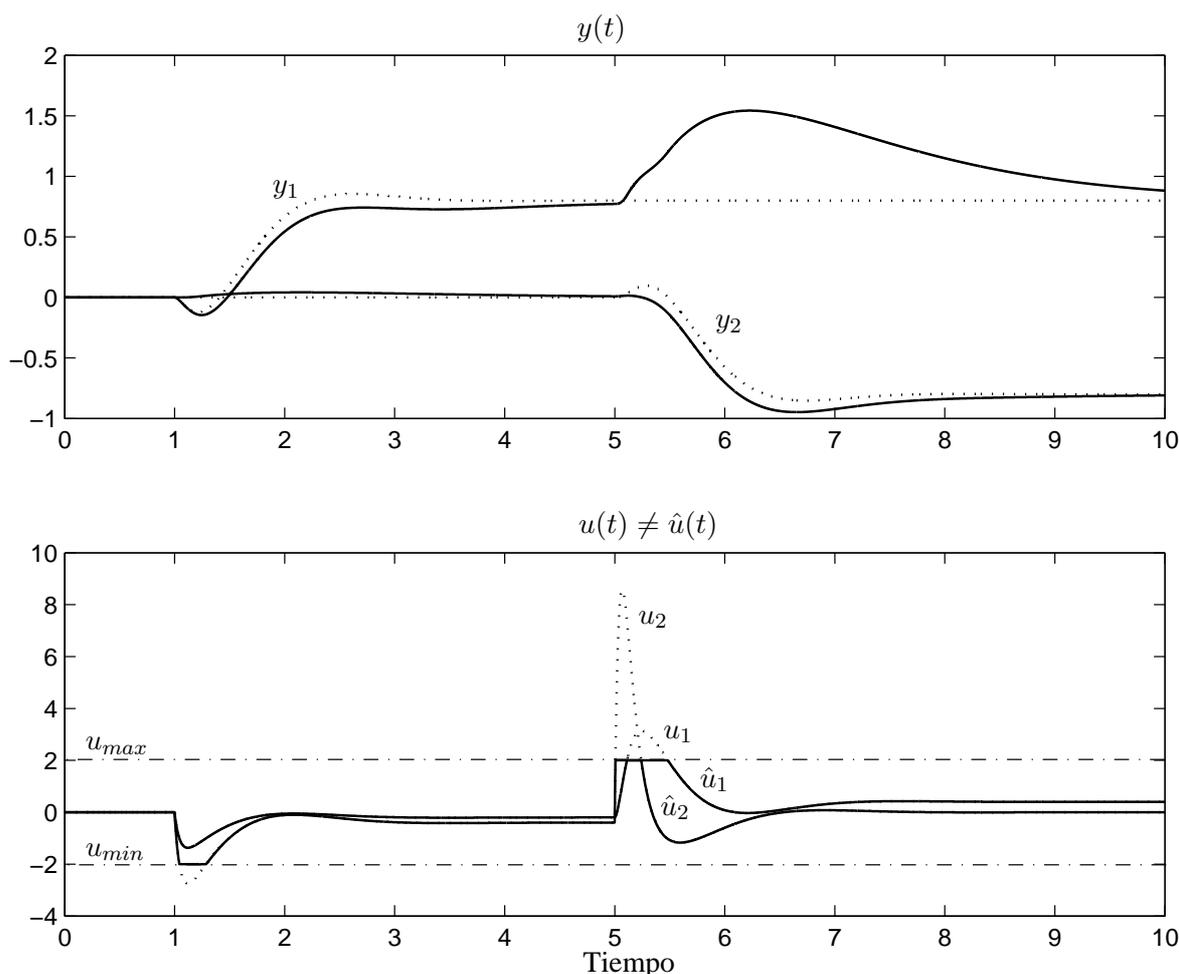


Figura 4.18: Respuestas del sistema de NMF con (línea continua) y sin (línea punteada) saturación de entrada.

y $\overline{s_{12}}$ incluyen \dot{u}_1 , en correspondencia con el grado relativo de las funciones de transferencia de $C(s)$.

Aquí también se puede apreciar cómo la propuesta de acondicionamiento de la referencia por MD hace que las salidas permanezcan dinámicamente desacopladas aún en presencia de saturación en los actuadores (Figura 4.19). A su vez, la velocidad de respuesta no se degrada significativamente (las líneas punteadas corresponden al caso sin saturación). Cabe resaltar que la salida del controlador nunca excede los límites impuestos por los actuadores, y por lo tanto coincide todo el tiempo con la entrada a la planta. Cuando la referencia r_1 cambia y u_2 alcanza el límite inferior del segundo actuador, se establece un régimen deslizante sobre la superficie $\overline{s_{21}} = 0$ entre t_1 y t_2 . Esto moldea la referencia r_1 para evitar la saturación de u_2 . Con el escalón en r_2 , se establece un nuevo modo deslizante, ahora sobre dos superficies: $\overline{s_{22}} = 0$ (entre t_3 y t_4) y $\overline{s_{12}} = 0$ (desde t_4 a t_5). La constante $k_2^{12} = -0,02$ de esta última superficie fue elegida para una constante de tiempo de $20ms$. Este control de la velocidad de aproximación al límite evita que el actuador golpee bruscamente contra sus límites (observar el área ampliada dentro de la Figura 4.19), por lo que podría utilizarse como un mecanismo de protección para los actuadores.

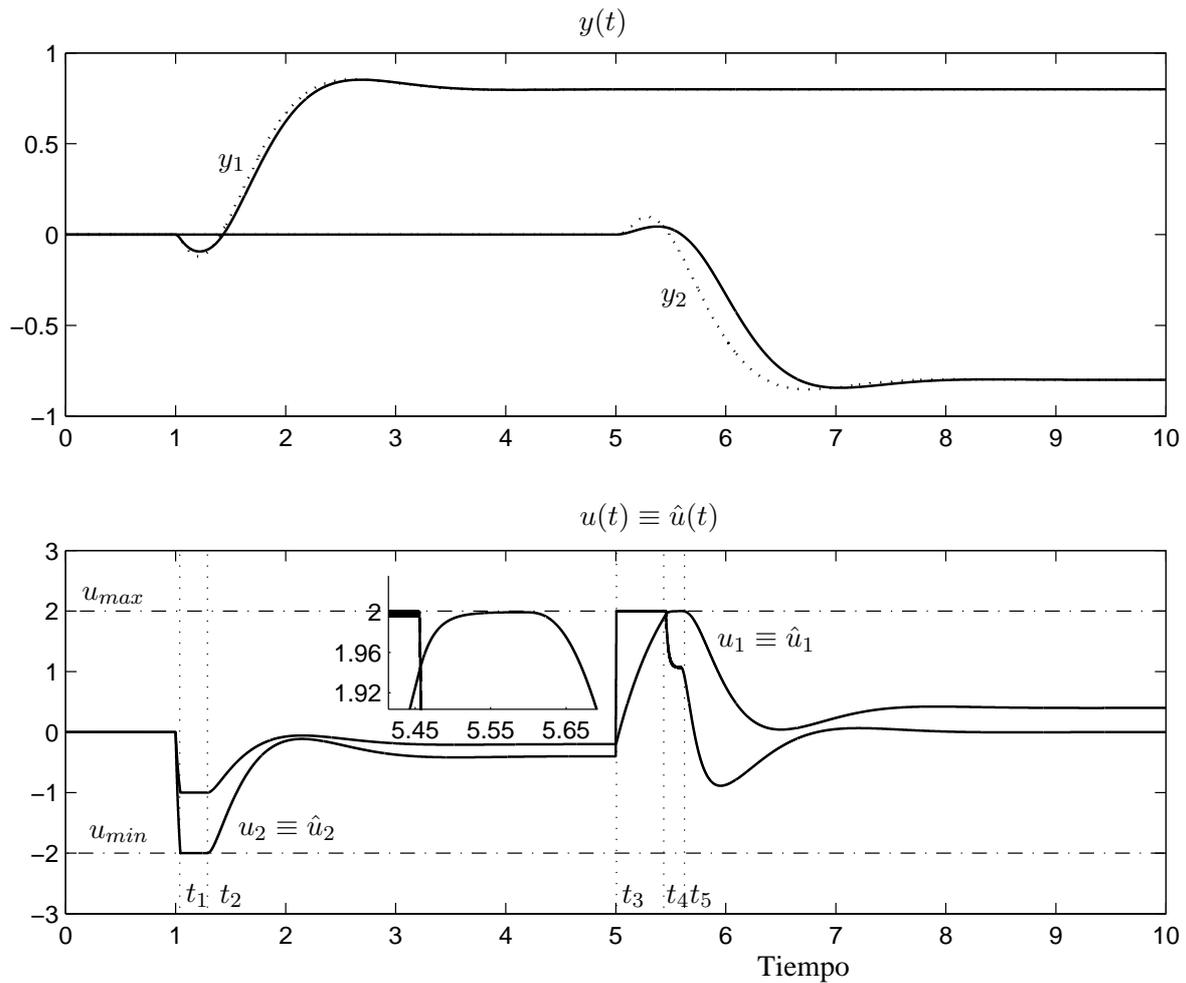


Figura 4.19: Respuesta del sistema de NMF con saturación en los actuadores y acondicionamiento por MD.

El gráfico izquierdo de la Figura 4.20 evidencia el cambio de direccionalidad de la entrada a la planta \hat{u} con respecto a la salida del controlador u cuando no se acondiciona la señal de referencia. Particularmente, puede verse cómo la dirección de la salida del controlador -la señal necesaria para el desacoplamiento- cambia desde $t = 5,11s$ hasta $t = 5,24s$ (entre las dos flechas más largas y punteadas), mientras que la dirección de la entrada a la planta permanece inalterada durante el mismo período (la flecha más pequeña, en trazo continuo). El cuadro derecho confirma que $\hat{u} \equiv u$ cuando se aplica el método propuesto, lo que preserva el desacoplamiento del sistema (Figura 4.19). Nótese cómo en t_4 el MD se establece antes de que se alcance el límite \bar{u}_1 debido a la dinámica impuesta por $\bar{s}_{12} = 0$, que controla la velocidad de aproximación a la restricción (esto concuerda con la zona ampliada en la Figura 4.19).

Finalmente, la Figura 4.21 muestra la referencia r_f con el lazo de acondicionamiento por MD (líneas continuas) y sin él (líneas punteadas) correspondiente a la Figura 4.19. Además, presenta la evolución temporal de la señales discontinuas w_{ij} .

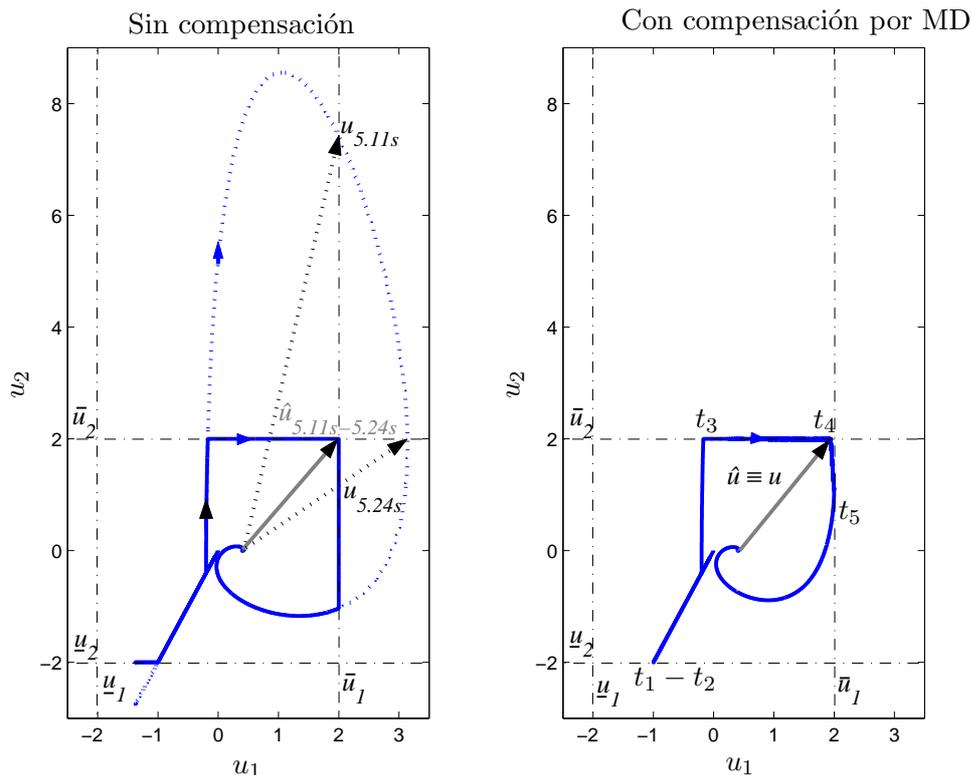


Figura 4.20: Trayectorias del vector de control u (línea punteada) y de la entrada a la planta \hat{u} (línea continua) en el plano (u_1, u_2) .

4.5.3. Etapa de molienda de la caña de azúcar

Como un tercer ejemplo, se presenta la aplicación de la estrategia propuesta al modelo de un proceso industrial con importante presencia en nuestro país: la molienda de la caña de azúcar. La Figura 4.22 presenta un diagrama esquemático de una etapa de molienda o *trapiche*.

Con el fin de maximizar la extracción de jugo, el nivel de caña en la tolva $h(t)$ y el torque de los rodillos $\tau(t)$ pueden ser controlados mediante la velocidad de la turbina $\Omega(t)$ y la posición $f(t)$ de un mecanismo hidráulico que ajusta el volumen de la tolva. Debido a las características de este proceso, el torque $\tau(t)$ tiene una influencia significativa en la cantidad de jugo extraído. Contrariamente, el nivel en tolva $h(t)$ afecta menos el rendimiento de la etapa. En efecto, el mayor propósito del control de $h(t)$ es filtrar la principal perturbación de la planta $d(t)$ (debida a la alimentación discontinua y variable de caña de azúcar), de forma de mantener una altura en tolva que produzca la compactación de la caña necesaria para una molienda eficiente (Ozkocak *et al.*, 1998).

El siguiente modelo linealizado fue obtenido para una etapa de molienda de origen australiano como la mostrada en la Figura 4.22 a partir de resultados experimentales (West, 1997):

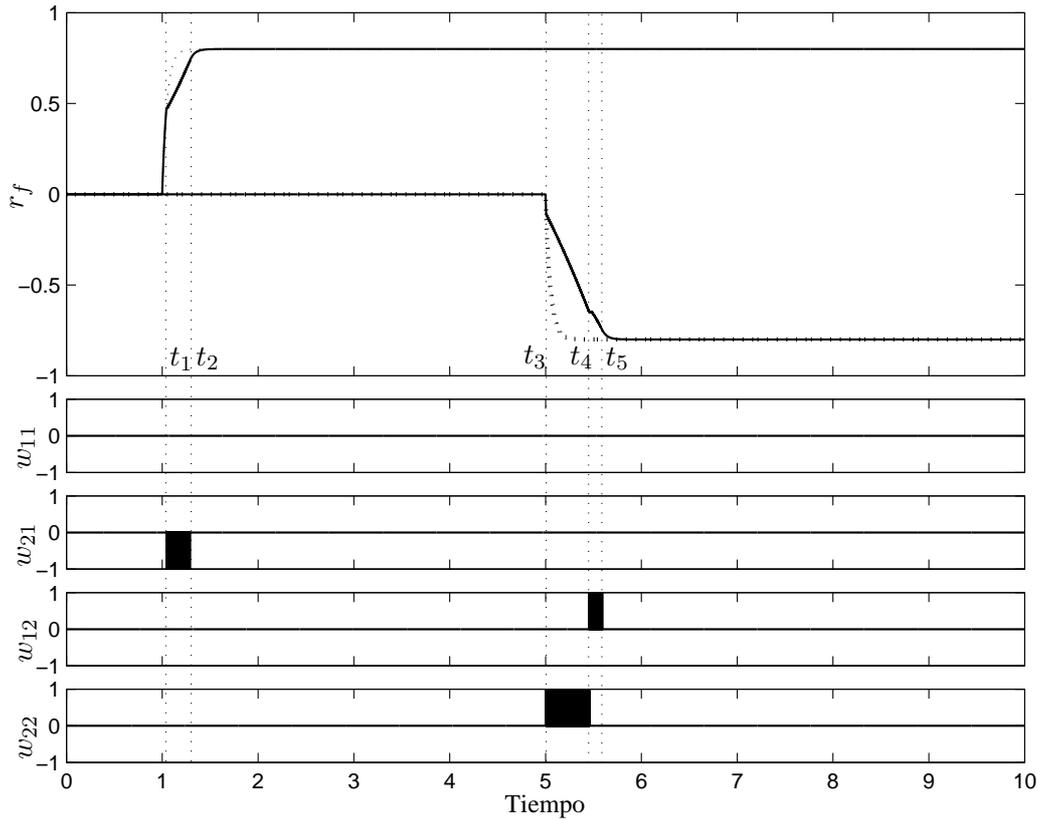


Figura 4.21: Referencia acondicionada r_f y señales discontinuas w_{ij} correspondientes a la Figura 4.19.

$$\begin{bmatrix} \tau(t) \\ h(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{25s+1} & \frac{s^2-0,005s-0,005}{s(s+1)} \\ \frac{1}{25s+1} & -\frac{0,0023}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(t) \\ \Omega(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{0,005}{s} \\ -\frac{0,0023}{s} \end{bmatrix} d(t). \quad (4.39)$$

Este modelo tiene un cero en el SPD en $s = 0,137$ con dirección asociada $h = [1 \ 5]^\top$. El pronunciado alineamiento del cero con la variable secundaria $h(t)$ nos indica que un diseño por desacoplamiento triangular es adecuado para este proceso, ya que sólo ocurrirán pequeñas interacciones en $h(t)$ si se desacopla únicamente la variable “principal” $\tau(t)$ (véase Capítulo 6). Por otro lado, este diseño confinará el efecto del cero de no-mínima fase a la segunda variable $h(t)$, evitando el esparcimiento sobre $\tau(t)$ que produciría un desacoplamiento completo. Esto se verificó en (West, 1997) y (Goodwin *et al.*, 2001), en donde el desacoplamiento triangular mostró obtener la mejor performance entre los diferentes diseños probados sobre este proceso.

Por lo tanto, para realizar las simulaciones tomamos de las referencias citadas el controlador que obtuvo desacoplamiento triangular. La respuesta a lazo cerrado del sistema con actuadores ideales se muestra en la Figura 4.23. Puede verse cómo el torque $\tau(t)$ es insensible a los cambios en el set-point del nivel en tolva r_{f_h} . A su vez, se evita por cierto el esparcimiento del cero de no-mínima fase: sólo la respuesta temporal del nivel en tolva muestra una respuesta de tipo inversa al escalón. El lazo cerrado logra también compensar rápidamente perturbaciones de tipo escalón en $d(t)$, particularmente en el canal del torque. Sin embargo, el cuadro inferior de la figura muestra que la velocidad de la turbina $\Omega(t)$ presenta variaciones

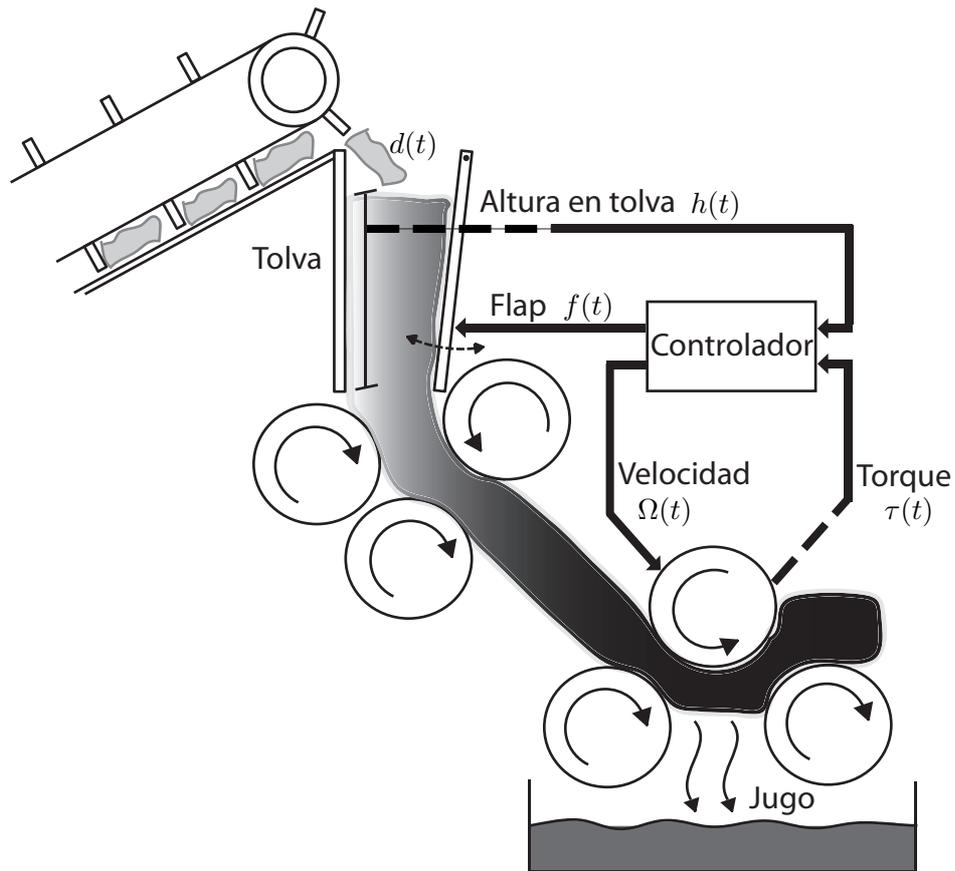


Figura 4.22: Etapa de molienda de caña de azúcar.

relativamente grandes y bruscas para el escalón en la referencia del nivel de tolva, dando lugar a una potencial saturación. Este riesgo de saturación crece a medida que se exige al sistema un mayor ancho de banda.

Luego, introducimos un elemento no-lineal de saturación a la velocidad de la turbina con el objetivo de evaluar sus efectos en la performance del sistema. La Figura 4.24 revela que aún para límites de saturación poco exigentes en la velocidad de la turbina $\Omega(t)$, se producen grandes interacciones en el torque al aplicar un escalón en el set-point del nivel de tolva. Como en los ejemplos anteriores, el grado de desacoplamiento deseado se pierde debido a la saturación de entrada y su asociada pérdida de direccionalidad en el control.

Nuevamente agregamos el lazo de compensación propuesto para evaluar su eficacia, esta vez en una configuración más simple. En efecto, debido a que sólo se busca preservar el desacoplamiento del torque, es suficiente generar señales discontinuas w_{12} y w_{22} para acondicionar $r_{f_h} = r_2$ cuando $f(t) = u_1$ u $\Omega(t) = u_2$ alcanzan sus respectivos límites. Los resultados que se presentan en la Figura 4.25 muestran que el método propuesto preserva el desacoplamiento triangular en presencia de saturación en la velocidad de la turbina. Para esto, el lazo auxiliar moldea r_{f_h} con la señal discontinua w_{22} . Observar que el rechazo a las perturbaciones no es afectado ya que una vez que el sistema retorna a la región lineal se recupera la dinámica original de lazo cerrado.

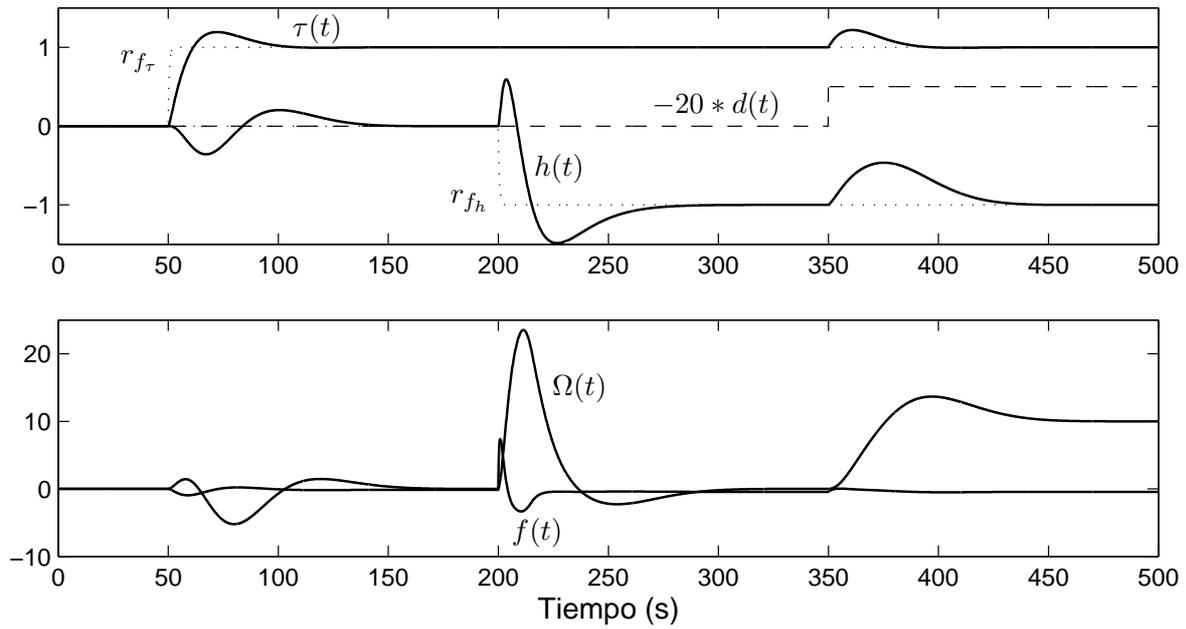


Figura 4.23: Respuesta parcialmente desacoplada con actuadores ideales.

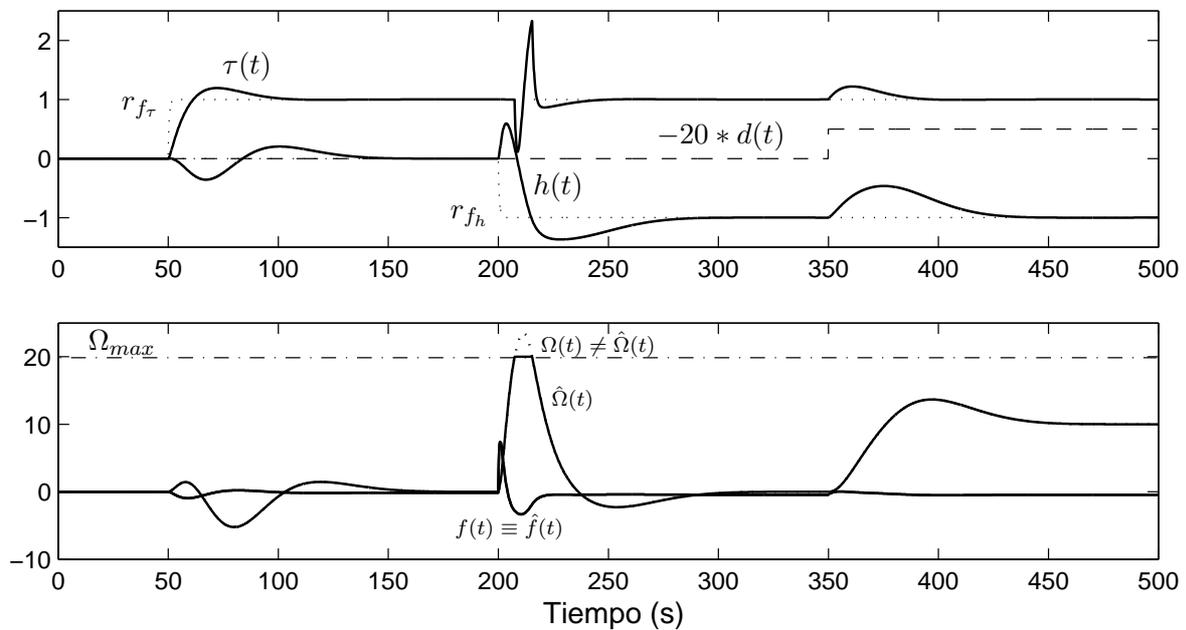


Figura 4.24: Degradación en la respuesta debida a saturación en la velocidad de la turbina.

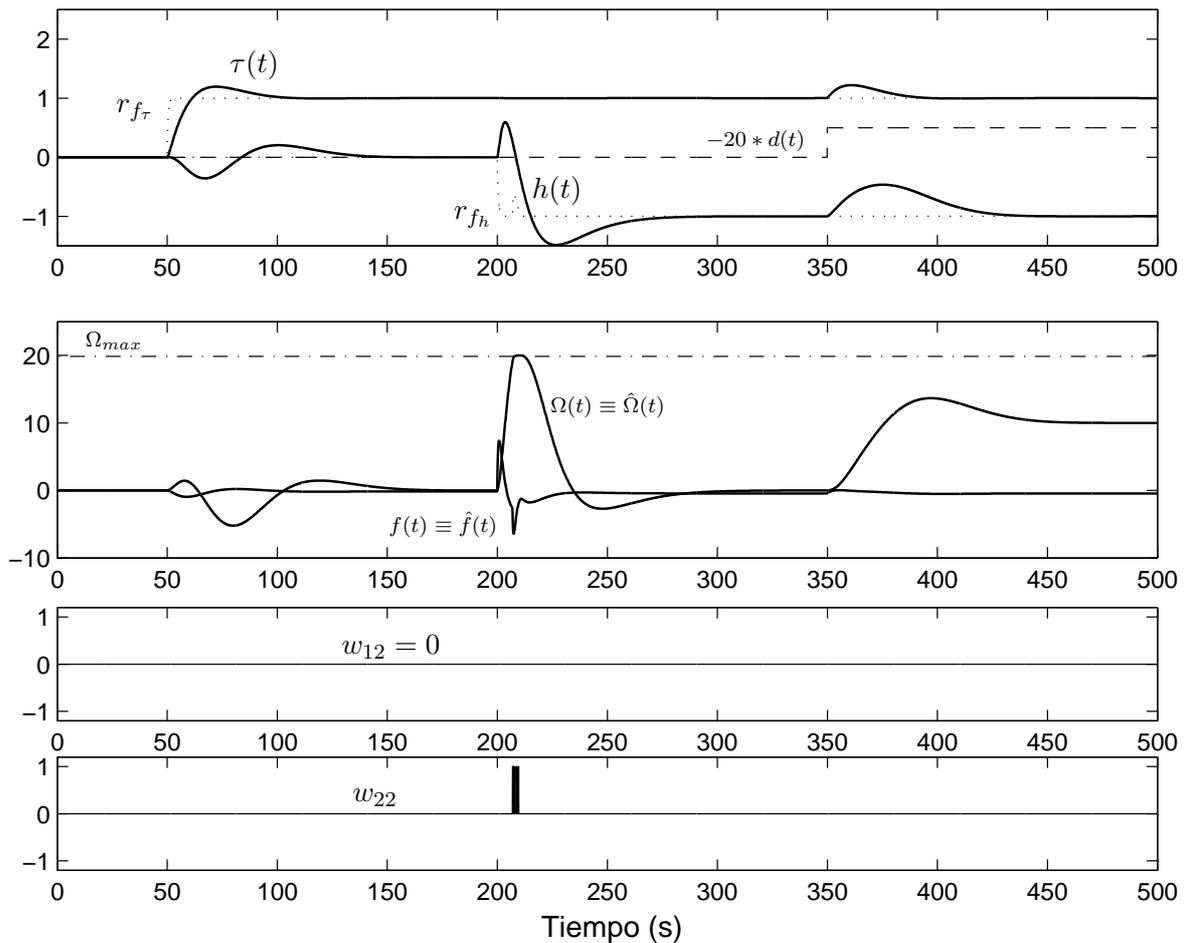


Figura 4.25: Mejora en la respuesta del sistema con restricciones mediante acondicionamiento por MD.

4.6. Resumen del capítulo

En este capítulo se analizaron los problemas ocasionados por las restricciones en la entrada a la planta en los sistemas realimentados. Para ello, se explicaron y ejemplificaron los fenómenos de *windup* y *cambio de direccionalidad* del control. En el caso de los sistemas MIMO, una consecuencia inmediata de estos fenómenos es la pérdida del desacoplamiento del lazo cerrado.

Se propuso un método basado en herramientas de los regímenes deslizantes para acondicionar la señal de referencia, de forma tal de evitar que se violen las restricciones del sistema de control.

El desarrollo de la propuesta se hizo en primer lugar para solucionar el *windup* en el caso de sistemas monovariantes controlados por controladores bipropios. Esta idea básica del método se aplicó luego como algoritmo *bumpless*, y también para abordar restricciones internas de un sistema de generación de energía (producción de hidrógeno a partir de energía eólica).

Posteriormente, se desarrolló el método para tratar el *cambio de direccionalidad* del control y preservar el desacoplamiento dinámico en sistemas multivariables con controladores propios. La solución propuesta evita por completo las restricciones mediante el acondicionamiento de la referencia, garantizando que el sistema opere siempre a lazo cerrado. De esta manera, se preserva la direccionalidad del control. Por otro lado, el método acondiciona únicamente la señal de referencia que fue modificada, evitando alterar las variables cuyos set-points permanecieron constantes. Así, se mantiene el desacoplamiento dinámico completo logrado para la operación lineal de los actuadores.

Una característica interesante del algoritmo es que permite diseñar la dinámica del lazo de corrección independientemente del diseño previo que se haya realizado para el lazo principal de control. Además, tiene la ventaja de que su implementación es extremadamente sencilla ya que el lazo de acondicionamiento se restringe a la etapa de baja potencia.

CAPÍTULO 5

LIMITACIÓN DE INTERACCIONES EN ESTRUCTURAS DE CONTROL DESCENTRALIZADAS

Hasta aquí, los métodos vistos para reducir o eliminar las interacciones de los sistemas multivariables se basaron en controladores MIMO centralizados, algo que también ocurre en general en la literatura. Sin embargo, a pesar de las ventajas de performance de los controladores multivariables centralizados, la gran mayoría de las aplicaciones en el control de procesos se basa aún en controles de tipo descentralizado. Debido a las limitaciones propias de su estructura, el control descentralizado o multi-lazo no es capaz por sí mismo de reducir o eliminar las interacciones cruzadas entre los distintos lazos. En este capítulo se aborda esta limitación de los controladores diagonales, ampliamente difundidos en la industria.

En primer lugar, se presentan algunos conceptos básicos relacionados con esta topología de control. En particular, se introduce el arreglo de ganancias relativas (RGA), que permite una caracterización simple de las interacciones, y se ilustran los efectos que pueden provocar las interacciones cruzadas. Posteriormente, se desarrolla un algoritmo para acotar las interacciones en las estrategias de control descentralizado, que puede ser fácilmente agregado a sistemas de control pre-existentes. Esta última propuesta ha sido publicada en (Garelli *et al.*, 2006c).

5.1. Introducción

El control de sistemas con múltiples entradas y múltiples salidas puede llevarse a cabo mediante controladores centralizados o mediante un conjunto de controladores independientes de una entrada y una salida (SISO). A pesar de la superioridad en performance de los controladores centralizados, hay muchas razones por las cuales los controladores descentralizados son la estructura dominante en la industria. En efecto, esta última estrategia presenta varias ventajas con respecto al control multivariable centralizado: menores costos de modelado, mayor flexibilidad en la operación, tolerancia a fallas, diseño y sintonización más simples,

etc. (Campo y Morari, 1994). A su vez, las redes de comunicación, los esquemas de arranque y la identificación son considerablemente más difíciles de realizar con controles centralizados que con estructuras descentralizadas. Incluso muchos controladores multivariables, como el caso del Control Predictivo basado en Modelo (MPC), usualmente operan como modos supervisores con controladores descentralizados PID en los niveles inferiores (Åström *et al.*, 2001).

A pesar de sus ventajas prácticas, los controles multi-lazo no pueden eliminar las interacciones de un proceso MIMO, y por ende cada entrada afecta no sólo a su correspondiente salida, sino también a todas las restantes. Muchos artículos han abordado esta limitación del control descentralizado (Åström *et al.*, 2001; Freudenberg y Middleton, 1996; Johansson y Rantzer, 1999). Cuando las interacciones en un proceso son significativas, es importante la elección de la estructura del control, es decir, cuál de las variables de entrada disponibles será utilizada para controlar cada salida de la planta (problema de *apareo* entre variables). Herramientas útiles para realizar esta elección, conocidas como medidas de interacciones, han sido desarrolladas en la literatura desde que Bristol introdujo el *arreglo de ganancias relativas* (RGA, Relative Gain Array) (Conley y Salgado, 2000; Lee y Edgar, 2002; Salgado y Conley, 2004). Sin embargo, una adecuada selección de la estructura de control y una correcta sintonización no siempre permiten reducir el acoplamiento cruzado de entrada-salida a los niveles deseados.

En este capítulo se estudian las principales herramientas y problemas asociados al control descentralizado de sistemas MIMO. En particular, se analizan los efectos adversos que las interacciones cruzadas pueden causar en este tipo de arquitecturas. A partir de ello, se presenta un método para restringir las interacciones entre los distintos lazos de un sistema de control multivariable descentralizado. La metodología propuesta se basa en los conceptos de acondicionamiento de la referencia y del control por estructura variable presentados en los capítulos 3 y 4. El objetivo aquí será imponer cotas predefinidas a las interacciones entre los lazos del sistema de control multi-lazo. Para ello, a diferencia de la propuesta del capítulo anterior, se deberán considerar los estados de la planta bajo control, la cuál podrá ser en esta aplicación tanto estable como inestable.

La propuesta garantiza que las salidas que idealmente deben permanecer constantes (cuyos set-points no cambiaron) se mantengan dentro de un rango de valores pre-establecido. De esta manera, el método propuesto no sólo mejora el grado de desacoplamiento del sistema, sino que también permite su operación bajo modos seguros. Si bien la propuesta no presenta ninguna limitación con respecto al número de entradas y salidas del proceso a controlar, la presentación en este capítulo se limitará a sistemas de dos entradas y dos salidas para hacer más clara la explicación del método. Su extensión a sistemas de mayor dimensión no presenta mayores complicaciones.

El rango de interacciones permitidas como un parámetro de diseño y la posibilidad de agregar la propuesta a un control descentralizado pre-existente distinguen al método de otras propuestas recientes de control descentralizado con MD. Por ejemplo, en (Castaños y Fridman, 2004) las interacciones son consideradas perturbaciones, las cuales son atenuadas (pero no limitadas a un valor máximo) mediante una combinación de control por MD y por H_∞ . La misma consideración es hecha para las interacciones en (Chen y Peng, 2005), donde se diseñan controladores descentralizados por MD para la regulación de procesos químicos descritos por un modelo de segundo orden más retardo (SOPDT, Second Order Plus Dead Time). Otro ejemplo interesante de MD aplicado al control descentralizado puede encontrarse en (Ackar

y Özgüner, 2002). Mientras que en todos estos trabajos el MD es utilizado como la principal acción de control, en este capítulo el MD se aplica en un lazo auxiliar, que sólo se activa transitoriamente si se requiere alguna corrección.

5.2. Control Descentralizado

5.2.1. Descripción de la arquitectura

Sea $P(s)$ una matriz de funciones de transferencia racionales de $m \times m$ que relaciona el vector de entradas al sistema $u(t) = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_m]^T$ con el vector de salidas $y(t) = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_m]^T$, y sea $r(t) = [r_1 \ r_2 \ \dots \ r_m]^T$ el vector de señales de referencias o set-points para el lazo cerrado. Entonces, se dice que el control de $P(s)$ es descentralizado si el controlador $C(s)$ es una matriz de transferencia diagonal. O sea, $C(s) = \text{diag}(c_1(s), c_2(s), \dots, c_m(s))$ y

$$u_i(s) = c_i(s)(r_i(s) - y_i(s)). \quad (5.1)$$

La Figura 5.1 presenta un esquema general de los sistemas de control descentralizados, también conocidos como controles multi-lazo. Naturalmente, las restricciones impuestas a la estructura del controlador dan lugar a una degradación de la performance a lazo cerrado con respecto a los sistemas con controladores multivariables centralizados. No obstante ello, la mayoría de los sistemas de control multivariable se basan aún en arquitecturas descentralizadas debido a las ventajas prácticas de las mismas, que ya fueron mencionadas en la introducción.

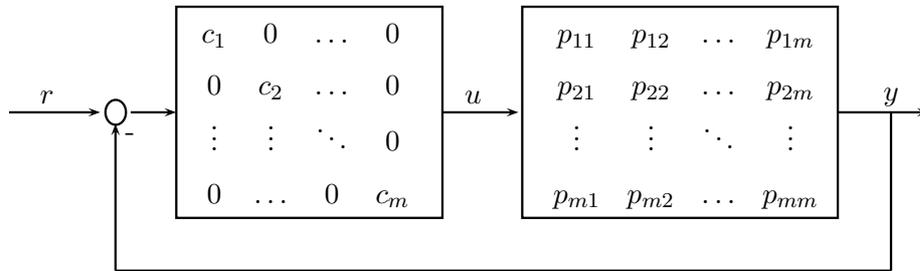


Figura 5.1: Estructura general de un sistema de control descentralizado

Dada su gran aceptación en la industria, se tiende a pensar que el control multi-lazo es suficiente para controlar cualquier tipo de sistema MIMO. Aquí se ilustrará a través de un ejemplo numérico que si bien la mayoría de los sistemas de la *vida real* utilizan este tipo de arquitectura, el control descentralizado no siempre da lugar a soluciones satisfactorias. Esto en algunos casos requerirá de estrategias para mejorar las respuestas obtenidas con controladores diagonales, como la presentada en este capítulo, mientras que para otros problemas no habrá otra alternativa que pensar en un control multivariable centralizado.

En adelante estudiaremos algunas de las propiedades básicas de los sistemas de control descentralizados necesarias para una mejor comprensión de las ventajas y las limitaciones de la estrategia de control propuesta en este capítulo.

5.2.2. RGA como medida de interacciones

Uno de los problemas iniciales que se debe resolver al utilizar una arquitectura de control descentralizada es el “apareo” de variables, esto es, decidir qué variables de entrada (acciones de control) serán utilizadas para controlar cada una de las salidas (variables controladas) del proceso. En el caso de plantas multivariables representadas por matrices de transferencia de $m \times m$, habrá $m!$ posibles combinaciones de entradas y salidas.

Los métodos que ayudan a resolver este problema se conocen como *medidas de interacciones*. Una de las primeras medidas de interacciones, enormemente difundida y utilizada por años en aplicaciones prácticas, es el ya mencionado *arreglo de ganancias relativas* (RGA, Relative Gain Array). Una síntesis de las propiedades de lazo cerrado que pueden conocerse a partir del RGA fue publicada por Lee y Edgar (2002) (véanse también las referencias de ese trabajo).

En esta sección, seguiremos el razonamiento hecho por Bristol (1966) al proponer originalmente el RGA para mostrar por qué este índice es utilizado para medir las interacciones entre los lazos de un sistema de control descentralizado. Es importante remarcar que en el desarrollo del RGA, Bristol asumió procesos descritos por matrices de ganancias constantes, por lo que usualmente se utiliza la matriz de ganancias de estado estacionario para el cálculo del RGA. En efecto, la idea detrás del RGA es cuantificar la influencia que tienen en la ganancia de estado estacionario de un determinado lazo el resto de los lazos del sistema de control. No obstante, trabajos posteriores demostraron la importancia que tiene este índice como función de la frecuencia (Hovd y Skogestad, 1992; Skogestad y Morari, 1989; McAvoy, 1983).

Sean u_j e y_i una entrada y una salida determinada de una planta multivariable con matriz de ganancias en estado estacionario $P(0)$. Se quiere usar u_j para controlar y_i . Por tratarse de una estructura descentralizada, pueden darse dos casos extremos:

1. Que los otros lazos estén abiertos. Entonces, todas las demás entradas pueden considerarse constantes. En particular, $u_k = 0, \forall k \neq j$.
2. Que los otros lazos estén cerrados. En este caso, suponiendo control perfecto en estos lazos, todas las demás salidas pueden considerarse constantes. En particular, $y_k = 0, \forall k \neq i$.

Notar que si bien el control perfecto ($y_k = r_k$, r_k referencia del lazo k) sólo es posible en estado estacionario, puede considerarse como una buena aproximación para frecuencias dentro del ancho de banda de cada lazo.

Ahora evaluamos el efecto $\partial y_i / \partial u_j$ de la entrada u_j sobre la salida y_i para los casos 1 y 2. Así tenemos:

1. Con los otros lazos abiertos, es inmediato ver a partir de $y = P(0)u$ que

$$\left(\frac{\partial y_i}{\partial u_j} \right)_{u_k=0; k \neq j} = p_{ij}(0). \quad (5.2)$$

Es decir, el efecto de u_j sobre y_i queda determinado por el elemento ij de la matriz $P(0)$, que aquí denotamos $p_{ij}(0) = [P(0)]_{ij}$.

2. Para evaluar este efecto cuando los otros lazos están cerrados, intercambiamos los roles de $P(0)$ y $P^{-1}(0)$, de u e y , y de i y j . De esta forma, partiendo ahora de $u = P^{-1}(0)y$

$$\left(\frac{\partial u_j}{\partial y_i}\right)_{y_k=0; k \neq i} = [P^{-1}(0)]_{ji}, \quad (5.3)$$

resultando finalmente para este caso

$$\left(\frac{\partial y_i}{\partial u_j}\right)_{y_k=0; k \neq i} = 1/[P^{-1}(0)]_{ji} = \hat{p}_{ij}(0). \quad (5.4)$$

El RGA se define como la matriz cuyos elementos son las ganancias relativas λ_{ij} , siendo:

$$\lambda_{ij} \triangleq \frac{p_{ij}(0)}{\hat{p}_{ij}(0)} = [P(0)]_{ij}[P^{-1}(0)]_{ji}. \quad (5.5)$$

O sea, denotando al RGA como Λ :

$$\Lambda = P(0) \times [P^{-1}(0)]^{\top}, \quad (5.6)$$

donde \times indica el producto de Schur (multiplicación elemento a elemento).

Claramente, será conveniente que la ganancia relativa λ_{ij} entre la variable a controlar y_i y la entrada elegida para controlarla u_j sea cercana a 1, ya que esto implica que la ganancia desde u_j a y_i no se ve afectada al cerrar o abrir los otros lazos de control. Por otro lado, una ganancia $\lambda_{ij} < 0$ indica que la ganancia de estado estacionario entre u_j e y_i cambiará de signo cuando los otros lazos se cierren. Por ello, se deberá evitar el “apareo” de variables con ganancia relativa $\lambda_{ij} < 0$.

Comentario 5.1 A partir de (5.6), se ha utilizado también a $\Lambda(s) = P(s) \times [P^{-1}(s)]^{\top}$ como medida de interacción en función de la frecuencia.

El RGA tiene una serie de propiedades algebraicas, de las cuáles las más importantes son:

1. La suma de los elementos de cualquiera de sus columnas o sus filas es igual a 1.
2. Permutaciones de columnas (filas) en $P(s)$ llevan a iguales permutaciones de columnas (filas) en $\Lambda(s)$.
3. El RGA es independiente del escalaje de entrada y salida (el escalaje de una matriz corresponde a multiplicar la matriz por 2 matrices diagonales no-singulares D y D' , tal que la matriz escalada resulta $P' = DPD'$).
4. Un cambio en un elemento de $P(s)$ igual a la inversa negativa del elemento correspondiente del RGA lleva a la singularidad.
5. El RGA es igual a la matriz identidad si $P(s)$ es triangular inferior o superior.

De la última propiedad se concluye que $\Lambda(s) - I$ proporciona una medida de las interacciones cruzadas en los dos sentidos (*two-way interactions*), es decir, aquellos casos en que dos lazos interactúan mutuamente. Esto no sucede en una planta con matriz de transferencia triangular, ya que en ella cada lazo afecta solamente a aquellos lazos que no tienen efecto sobre él (*one-way interaction*).

5.2.3. Selección de estructura de control: sistemas TITO

Considérese ahora el caso simplificado en que el sistema tiene 2 entradas y 2 salidas. Estos sistemas se conocen como sistemas TITO (*Two Inputs-Two Outputs*). La Figura 5.2 representa un diagrama de bloques de un sistema TITO con una estructura de control multi-lazo.

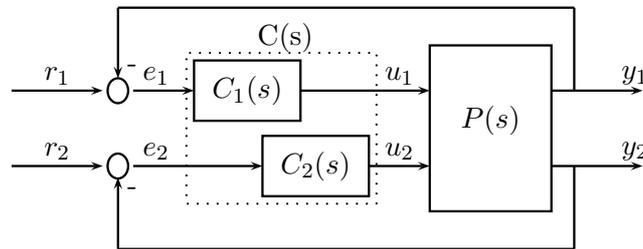


Figura 5.2: Sistema TITO con control descentralizado

Para estos sistemas, la primera de las propiedades algebraicas del RGA enumeradas en la sección anterior implica que el RGA quede determinado por un único parámetro escalar λ , conocido como *índice de interacción de Bristol*. Un sistema TITO puede representarse con las ecuaciones:

$$\begin{aligned} y_1(s) &= p_{11}(s)u_1(s) + p_{12}(s)u_2(s), \\ y_2(s) &= p_{21}(s)u_1(s) + p_{22}(s)u_2(s), \end{aligned} \quad (5.7)$$

o mediante la matriz de transferencia

$$P(s) = \begin{bmatrix} p_{11}(s) & p_{12}(s) \\ p_{21}(s) & p_{22}(s) \end{bmatrix}. \quad (5.8)$$

Investiguemos cómo la ganancia estática del primer lazo es afectada por el segundo lazo. Siguiendo con la suposición de Bristol de tener un control perfecto al cerrar este segundo lazo, de forma tal que las ganancias de los casos extremos considerados no dependan del tipo de controlador, se puede plantear

$$\begin{aligned} y_1(s) &= p_{11}(s)u_1(s) + p_{12}(s)u_2(s), \\ 0 &= p_{21}(s)u_1(s) + p_{22}(s)u_2(s). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Si se elimina $u_2(s)$ de la primera ecuación, se obtiene la ganancia del primer lazo cuando el segundo lazo está cerrado

$$y_1(s) = \frac{p_{11}(s)p_{22}(s) - p_{12}(s)p_{21}(s)}{p_{22}(s)}u_1(s). \quad (5.10)$$

El cociente entre la ganancia estática del primer lazo con el segundo lazo abierto ($p_{11}(0)$) y la del primer lazo con el segundo lazo cerrado:

$$\lambda = \frac{p_{11}(0)p_{22}(0)}{p_{11}(0)p_{22}(0) - p_{12}(0)p_{21}(0)}, \quad (5.11)$$

es el *índice de interacción de Bristol*. Si bien su significado se refiere a condiciones de estado estacionario, este parámetro sirve de guía para decidir cómo conectar los controladores descentralizados en sistemas TITO. En particular, si $\lambda = 1$, que corresponde a $p_{12}(0)p_{21}(0) = 0$, la ganancia estática del primer lazo no se ve afectada por el segundo lazo.

Como es evidente, este índice está muy relacionado con los elementos λ_{ij} del RGA. De hecho, para el sistema (5.7) el RGA es

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 1 - \lambda \\ 1 - \lambda & \lambda \end{bmatrix}, \quad (5.12)$$

con λ dado por (5.11).

Si $0 < \lambda < 1$ la ganancia de cada uno de los lazos es mayor con el otro lazo cerrado que con el otro lazo abierto. En cambio, si $\lambda > 1$ la ganancia de los lazos disminuye al cerrarse el otro lazo. Nuevamente, el peor caso se da cuando $\lambda < 0$, ya que en ese caso la ganancia estática de un lazo determinado cambia de signo al cerrarse el otro lazo.

Bristol dedujo que la conexión más conveniente es aquella que haga que las ganancias relativas sean positivas y lo más cercanas a 1. Notar que si $\lambda = 0$, con sólo permutar los lazos tampoco se afectará la ganancia de un lazo al cerrar el otro. En general, es ventajoso intercambiar la conexión de entradas y salidas cuando $\lambda < 0,5$ (Åström y Hägglund, 2006). McAvoy (1983) postuló que se debe lograr un apareo con $0,67 < \lambda < 1,5$ para tener una performance aceptable. En Åström y Hägglund (2006) se aconseja desacoplar el sistema si el índice de Bristol queda fuera de este rango, ya que el control descentralizado no dará en este caso buenos resultados. Sin embargo, las plantas con elementos del RGA grandes son difíciles de controlar en presencia de incertidumbre en la entrada, por lo que algunos autores desaconsejan para estos procesos el uso de controladores basados en la inversa de la planta si se busca robustez ante este tipo de incertidumbre (Skogestad y Postlethwaite, 2005). Esto puede verse como una motivación adicional para el desarrollo de estrategias que perfeccionen el control descentralizado de sistemas fuertemente acoplados, como la que se propone en este capítulo.

Comentario 5.2 Existe una fuerte correlación entre el RGA (o una norma del RGA) y el número de condición $\kappa(P)$, que se define como el cociente entre el máximo y el mínimo valor singular de un sistema multivariable. Cuando un sistema tiene un $\kappa(P)$ grande, se dice que el sistema está mal condicionado (*ill-conditioned*). En (Grosdidier et al., 1985) y (Nett y

(Manousiouthakis, 1987) se establecieron las relaciones entre estos dos índices, demostrándose que un sistema con elementos del RGA grandes está siempre mal condicionado. Si bien como ya se mencionó algunos autores proponen evitar el uso de desacopladores en estos sistemas, existen también argumentos en la dirección opuesta (Gjosaeter y Bjarne, 1997). Lo que no se discute es la dificultad de controlar sistemas con elevados RGA y $\kappa(P)$, particularmente con controladores descentralizados. Esta situación deberá entonces evitarse en la medida de lo posible mediante un apropiado diseño del proceso y una adecuada elección de los actuadores (Morari y Zafriou, 1989).

Ejemplo 5.1 Considérense nuevamente los sistemas del Ejemplo 2.2

$$P_1(s) = \frac{1}{(1+s)^2} \begin{bmatrix} s+3 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.13)$$

y del Ejemplo 2.3

$$P_2(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s-1 & s \\ -6 & s-2 \end{bmatrix}. \quad (5.14)$$

El RGA correspondiente al sistema multivariable de NMF $P_1(s)$ es

$$\Lambda(P_1(0)) = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad (5.15)$$

y por lo tanto su índice de Bristol $\lambda = -1$. De acuerdo a lo analizado en esta sección, se deberán invertir las salidas de este sistema si se quiere utilizar una arquitectura de control descentralizada, a pesar de que sus elementos en la diagonal no presenten a priori ninguna dificultad como transferencias individuales.

En cambio, el RGA de $P_2(s)$ es la matriz identidad y su índice de Bristol $\lambda = 1$, algo que quizás resulte contra-intuitivo de acuerdo a los ceros de NMF en los elementos diagonales del sistema. Esto indica que en una estructura multi-lazo se deberá controlar y_1 con u_1 e y_2 con u_2 .

De acuerdo a lo visto en el Ejemplo 2.3, el sistema $P_2(s)$ tiene los ceros multivariables en $s = -1$ y $s = -2$. Se tiene entonces un caso interesante en el que las interacciones pueden resultar beneficiosas: mientras el control individual del primer o segundo lazo presenta severas limitaciones debido a los ceros en el SPD en $p_{11}(s)$ y $p_{22}(s)$, el control del sistema multivariable puede hacerse más rápido ya que sus ceros están en el SPI. Esta situación se analiza en (Goodwin et al., 2005), donde además se hallan restricciones en el dominio del tiempo para sistemas de control descentralizados, las cuales permiten obtener cotas para el tiempo de establecimiento y las respuestas inversas bajo esta arquitectura de control.

5.2.4. Controlabilidad Integral Descentralizada

Otra característica relevante de los sistemas de control descentralizados es que un lazo determinado del sistema pueda ser re-sintonizado o desconectado sin que el sistema a lazo cerrado se haga inestable. Esto es muy importante en la práctica, ya que permite obtener la performance deseada a lazo cerrado sintonizando lazo por lazo individualmente sin riesgo de que el sistema se vuelva inestable. Además, evita que el sistema se haga inestable producto de saturaciones de entrada o fallas en sensores y actuadores.

Para esto se define la Controlabilidad Integral Descentralizada (Skogestad y Morari, 1992; Campo y Morari, 1994):

Definición 5.1 (Controlabilidad Integral Descentralizada, DIC). *Una planta $P(s)$ es DIC si existe un controlador descentralizado con acción integral en cada lazo tal que (a) el sistema realimentado es estable y (b) la ganancias de cada lazo individual pueden ser afectadas por un factor ϵ_i , $0 < \epsilon_i < 1$ sin afectar la estabilidad del lazo cerrado.*

Si bien no existen condiciones necesarias y suficientes para que una planta de $n \times n$ sea DIC, el RGA provee una herramienta útil para verificar en qué casos una planta con una determinada estructura de control no es DIC. Esto queda establecido en el siguiente resultado, originalmente demostrado en (Grosdidier *et al.*, 1985):

Teorema 5.1. *Sea una planta cuadrada $P(s)$ y un controlador diagonal $C(s)$ con acción integral en todos sus lazos, tal que $P(s)C(s)$ es estrictamente propia. Entonces, si un elemento diagonal del RGA λ_{ii} es negativo, el sistema a lazo cerrado cumple alguna de las siguientes características:*

- A- *El sistema a lazo cerrado es inestable.*
- B- *El lazo i es inestable de por sí (con los otros lazos abiertos)*
- C- *El sistema a lazo cerrado es inestable si se abre el lazo i .*

Claramente, ninguna de las tres alternativas que resultan a partir de un $\lambda_{ii} < 0$ es deseable. El peor caso es el A, aunque el caso C es también crítico ya que implica que el sistema se inestabiliza si el lazo i se abre por alguna razón, como por ejemplo, a causa de la saturación de la acción de control. Por lo tanto, el Teorema 5.1 da otra motivo para evitar λ_{ii} menores que cero.

Según el Teorema 5.1, si se quiere obtener un sistema DIC uno debe necesariamente conectar entradas y salidas correspondientes a ganancias relativas positivas. Para ello, una característica interesante del RGA es que no debe recalcularse para evaluar cada posibilidad de “apareo”, ya que cualquier permutación de columnas o filas en $P(s)$ da lugar a la misma permutación de columnas o filas en el RGA (por la segunda de las propiedades algebraicas enumeradas). Esta propiedad permite entonces eliminar muchas de las posibles combinaciones con sólo observar el RGA, tal como muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 5.2 *Considérese una planta de 3×3 con la siguiente matriz de ganancias en estado estacionario*

$$P(0) = \begin{bmatrix} 10,2 & 5,6 & 1,4 \\ 15,5 & -8,4 & -0,7 \\ 18,1 & 0,4 & 1,8 \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

Su RGA será

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0,96 & \mathbf{1,45} & -1,41 \\ \mathbf{0,94} & -0,37 & 0,43 \\ -0,90 & -0,07 & \mathbf{1,98} \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

Para una planta de 3×3 existen 6 posibles formas de conectar el controlador descentralizado. Sin embargo, del RGA vemos que hay un solo elemento positivo en la segunda columna ($\lambda_{12} = 1,45$) y en la tercera fila ($\lambda_{33} = 1,98$), y por lo tanto hay una sola conexión que da lugar a elementos diagonales del RGA positivos (u_1 con y_2 , u_2 con y_1 y u_3 con y_3). De esta manera, mediante la simple observación del RGA se eliminaron 5 de las 6 posibles combinaciones.

En el caso de sistemas TITO sí se tiene una condición necesaria y suficiente para que una planta $P(s)$ sea DIC (Skogestad y Morari, 1992; Campo y Morari, 1994)

Teorema 5.2. *Una planta $P(s)$ de 2×2 es DIC sí y sólo sí el índice de Bristol λ es mayor que cero ($\lambda > 0$).*

Este resultado incrementa la importancia de llevar a cabo una correcta selección de la estructura de control según se vio en la sección anterior.

5.2.5. Efecto de las interacciones en el control descentralizado

En esta sección se ilustran a través de un ejemplo algunos de los efectos que tienen las interacciones cruzadas de un sistema multivariable en una arquitectura de control descentralizada.

Considérese el siguiente sistema, muy difundido en la literatura y conocido como *sistema de Rosenbrock* (Rosenbrock, 1970; Åström *et al.*, 2001)

$$P(s) = \begin{bmatrix} p_{11}(s) & p_{12}(s) \\ p_{21}(s) & p_{22}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{2}{s+3} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

Como puede apreciarse, los subsistemas SISO que componen este proceso de 2×2 no presentan a priori ninguna dificultad para su control cuando se los analiza por separado. Por ejemplo, un controlador PI basta para obtener respuestas suficientemente rápidas en y_1 si el segundo lazo está abierto. Sin embargo, el sistema MIMO tiene un cero multivariable de no-mínima fase en $s = z_0 = 1$ con dirección de salida $h^T = [1 \ 1]$, lo que impone limitaciones de performance al sistema a lazo cerrado, particularmente para anchos de banda superiores a $\omega_0 = 1$.

En Åström y Hägglund (2006) se evalúa el desempeño obtenido con un controlador PI de ganancia proporcional $K_p = 2$ y ganancia integral $K_i = 2$ en cada lazo del sistema de Rosenbrock (5.18). La matriz de transferencia de este controlador descentralizado es:

$$C(s) = \begin{bmatrix} \frac{2s+2}{s} & 0 \\ 0 & \frac{2s+2}{s} \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

Aquí se propone una versión modificada de la planta expresada por (5.18). El objetivo es tener mayor flexibilidad para evaluar los efectos de las interacciones cuando la planta es controlada por un controlador diagonal como el propuesto en (5.19). Con este fin se plantea la dependencia de las transferencias cruzadas $p_{12}(s)$ y $p_{21}(s)$ con respecto a ganancias constantes k_{12} y k_{21} , las cuales pueden interpretarse como las distintas ganancias que resultan en la práctica al linealizar el modelo de un proceso determinado en distintos puntos de operación. La planta considerada es

$$P(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{k_{12}}{s+3} \\ \frac{k_{21}}{s+1} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

Los ceros multivariables de este sistema pueden obtenerse a partir de (ver sección 2.1.2 en Capítulo 2):

$$\det(P(s)) = \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{k_{21}k_{12}}{(s+1)(s+3)} = \frac{(1 - k_{21}k_{12})s + 3 - k_{21}k_{12}}{(s+1)^2(s+3)} = 0 \quad (5.21)$$

con lo que el sistema tendrá un cero de transmisión en

$$z_0 = s = \frac{-3 + k_{21}k_{12}}{1 - k_{21}k_{12}} \quad (5.22)$$

En el caso particular del sistema de Rosenbrock ($k_{12} = 2$, $k_{21} = 1$) se verifica la presencia del cero en $s = 1$. En tanto, el sistema (5.20) será de NMF siempre que $1 < k_{12}k_{21} < 3$. Por otro lado, el RGA será

$$\Lambda = P(0) \times [P^{-1}(0)]^T = \frac{1}{3 - k_{12}k_{21}} \begin{bmatrix} 3 & -k_{12}k_{21} \\ -k_{12}k_{21} & 3 \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

O sea, el índice de Bristol para sistemas de 2×2 está dado por $\lambda = \frac{3}{3 - k_{12}k_{21}}$. Notar que λ cambia de signo para $k_{12}k_{21} > 3$.

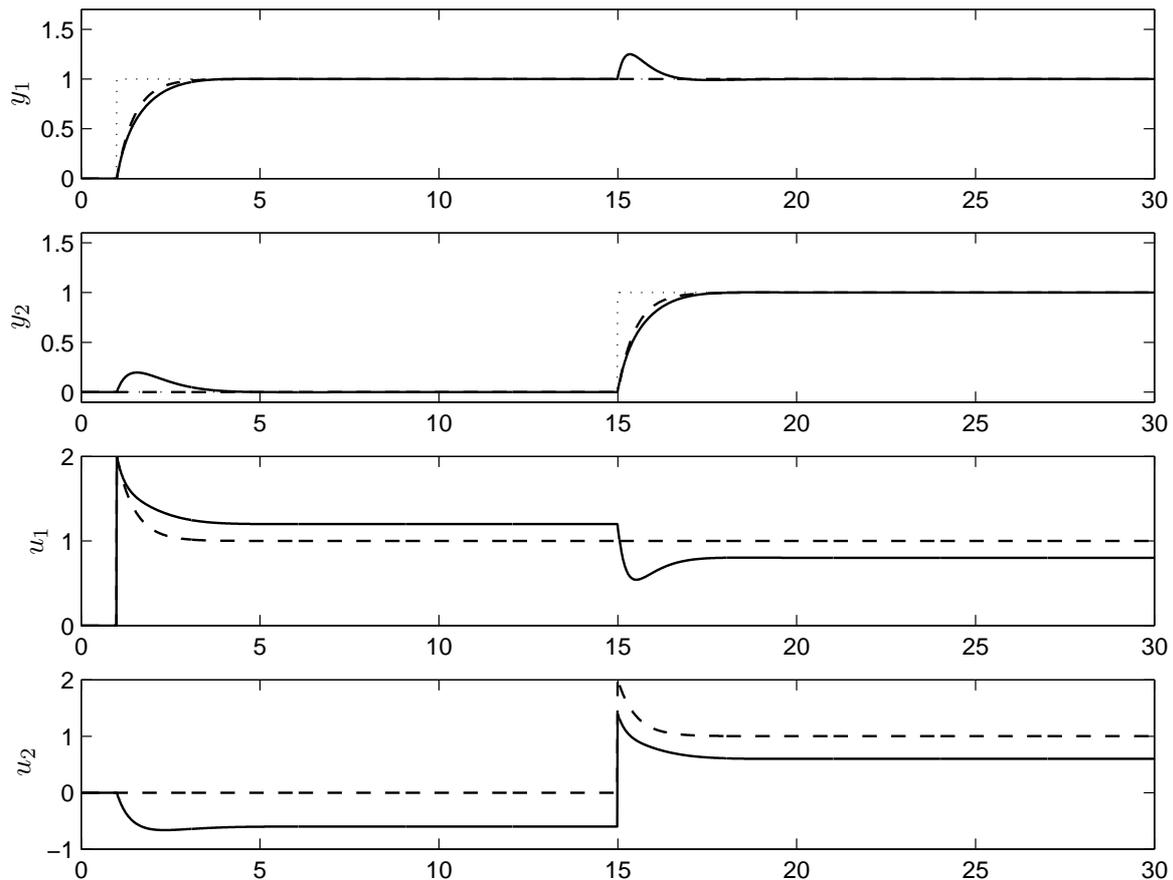


Figura 5.3: Respuesta del proceso (5.20) con $k_{12} = 0$ y $k_{21} = 0$ (línea a trazos) y $k_{12} = 1$ y $k_{21} = 0,5$ (línea continua) con controladores PI descentralizados.

Consideramos ahora el control de esta planta mediante el controlador (5.19) para cinco “puntos de operación” distintos, correspondientes a los siguientes valores de k_{12} y k_{21} :

1. $k_{12} = 0$, $k_{21} = 0$: Este es el caso trivial en que la planta MIMO está conformada por 2 sistemas SISO completamente desacoplados. Por lo tanto no hay interacciones entre los lazos ($\lambda = 1$). El sistema no tiene ceros, y no hay restricciones de performance para su control (podría hacerse aún más rápido aumentando las ganancias de los controladores PI). Las simulaciones correspondientes a este caso se muestran en línea a trazos en la Figura 5.3. El primer lazo fue excitado con un escalón unitario en $t = 1$ mientras que al segundo se le aplicó otra referencia de tipo escalón en $t = 15$ (las referencias se indican en línea punteada).
2. $k_{12} = 1$, $k_{21} = 0,5$: Si bien esta planta presenta interacciones cruzadas, el índice de Bristol es $\lambda = 1,2$, por lo que no se debe esperar un gran acoplamiento. A su vez, la planta es todavía de fase mínima (cero en $s = -5$). Las respuestas correspondientes se presentan nuevamente en la Figura 5.3, pero en línea continua. También para esta planta podría hacerse más rápida la dinámica de lazo cerrado. Por ejemplo, si se multiplica a las ganancias del controlador por un factor 5, se obtiene una mayor velocidad de respuesta e interacciones de similar amplitud (aunque obviamente se requerirá mayor acción de control).

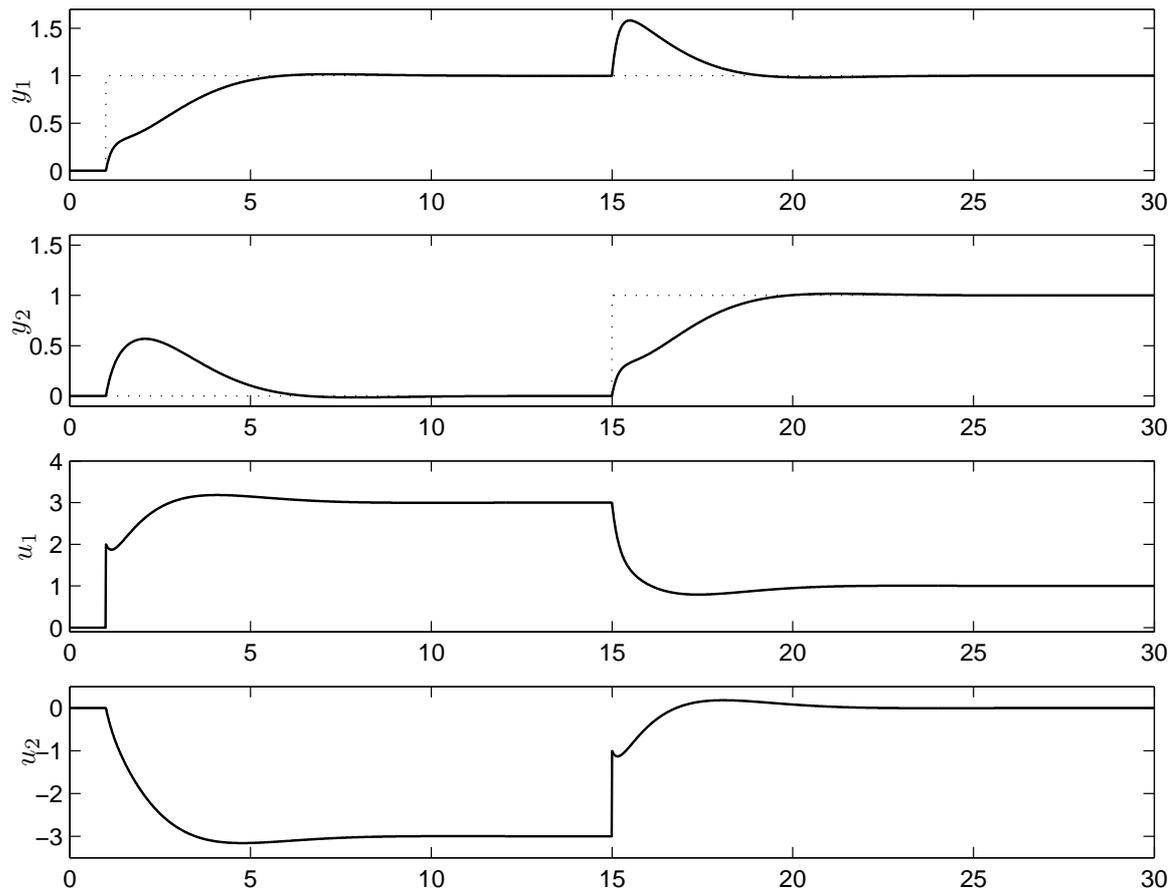


Figura 5.4: Respuesta del proceso (5.20) con $k_{12} = 2$ y $k_{21} = 1$ (sistema de Rosenbrock) con controladores PI descentralizados.

3. $k_{12} = 2$, $k_{21} = 1$: Es el sistema de Rosenbrock original. A pesar de la simplicidad de sus transferencias individuales, el incremento en las ganancias cruzadas hace que el sistema presente características de fase no mínima, haciendo más difícil el control. En la Figura 5.4 puede observarse que la respuesta obtenida con el mismo controlador (5.19) es considerablemente más lenta que en los casos anteriores. A su vez, las interacciones también son en este caso de mayor amplitud y tiempo de establecimiento, en concordancia con el mayor índice de Bristol ($\lambda = 3$). En este caso, si se aumentan las ganancias K_p y K_i de los controladores la respuesta se hace fuertemente oscilatoria, o incluso inestable a partir de un factor mayor a 2,5.
4. $k_{12} = 1,7$, $k_{21} = 1,7$: Si bien el sistema sigue siendo estable, las respuestas obtenidas se hacen inaceptables, lo cual se corresponde con el alto índice de Bristol ($\lambda = 27,27$) y el cero en el SPD muy próximo al origen ($s = 0,058$). La evolución temporal de las salidas y las acciones de control se presenta en la Figura 5.5 (nótese el cambio de escalas, y que el escalón del segundo lazo se aplicó ahora en $t = 50$).
5. $k_{12} = 2$, $k_{21} = 2$: Para estas ganancias el sistema pasa nuevamente a ser de fase mínima ($z_0 = s = -0,33$). Sin embargo, el lazo cerrado con el controlador (5.19) se hace inestable. El índice de Bristol es negativo ($\lambda = -3$), lo que sugiere invertir la conexión del controlador. En efecto, al intercambiar las salidas de la planta y cerrar el lazo se obtiene una respuesta estable, aunque demasiado lenta (Figura 5.6).

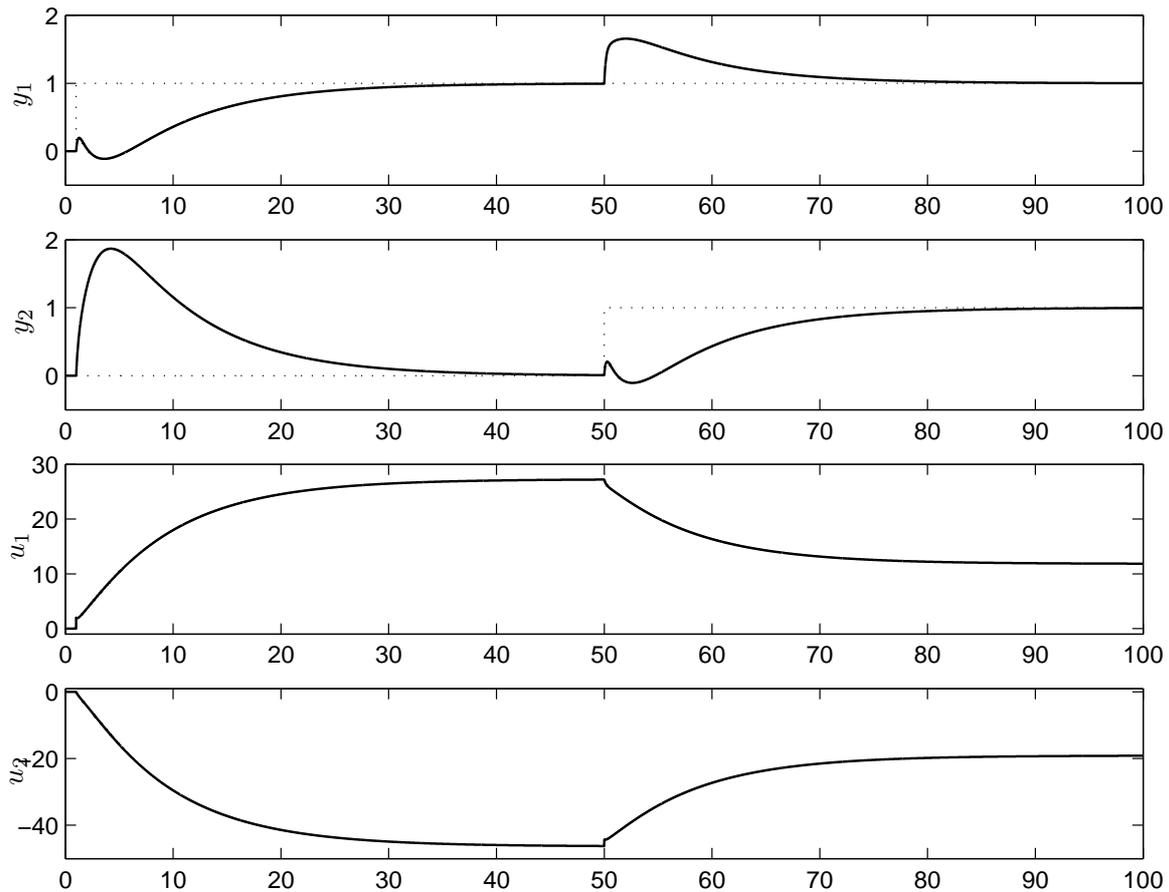


Figura 5.5: Respuesta del proceso (5.20) con $k_{12} = 1,7$ y $k_{21} = 1,7$.

Como puede apreciarse, una vez estabilizado el lazo cerrado, las interacciones cruzadas inherentes a los sistemas multivariables constituyen una de las principales limitaciones de performance del control descentralizado. En la próxima sección se presenta un método para confinar las interacciones en un sistema de control descentralizado a un rango de amplitudes prefijado. Aún así, en numerosos problemas de control será necesario pensar en implementar un controlador multivariable centralizado para mejorar el desempeño del lazo cerrado.

En efecto, el ejemplo visto ilustra que a pesar de sus ventajas prácticas, el control descentralizado o multi-lazo no siempre da lugar a respuestas adecuadas en las variables controladas. Esto es particularmente cierto para sistemas de NMF, lo que motivó a pensar en una estrategia basada en controladores centralizados para el control de este tipo de sistemas, que se presenta en el próximo capítulo.

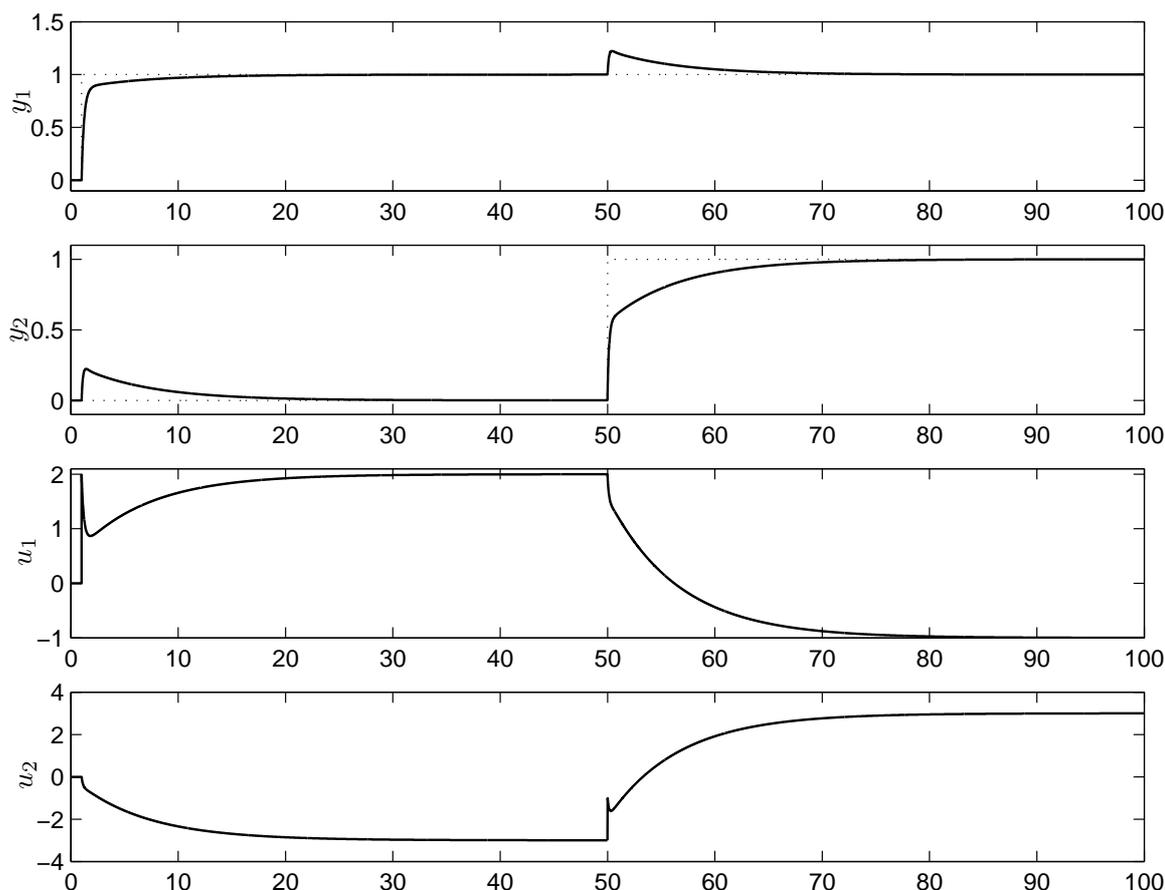


Figura 5.6: Respuesta del proceso (5.20) con las salidas permutadas y $k_{12} = 2$ y $k_{21} = 2$.

5.3. Limitación de interacciones por MD

5.3.1. Esquema de control

La Figura 5.7 ilustra el sistema de control descentralizado de un proceso MIMO con el método propuesto para limitar las interacciones cruzadas entre lazos. El mismo incluye un lazo auxiliar para el acondicionamiento por MD de las referencias.

Dentro del recuadro de línea punteada se puede distinguir un esquema general de un sistema de control descentralizado de 2×2 . $c_1(s)$ y $c_2(s)$ son controladores SISO realizables sintonizados de acuerdo a la performance deseada. Se considera que la estructura del control ha sido correctamente elegida a partir de alguna de las medidas de interacción existentes, y se supone que las referencias r_1 y r_2 no cambian simultáneamente¹. $P(s)$ representa el proceso bajo control, el cual puede ser en este caso tanto estable como inestable.

Fuera del recuadro punteado de la figura se observa el lazo de acondicionamiento de la referencia por MD propuesto para limitar las interacciones cruzadas. El mismo se compone

¹Notar que en numerosos problemas prácticos de control la excitación viene dada por cambios individuales en la referencia, particularmente en el control de procesos.

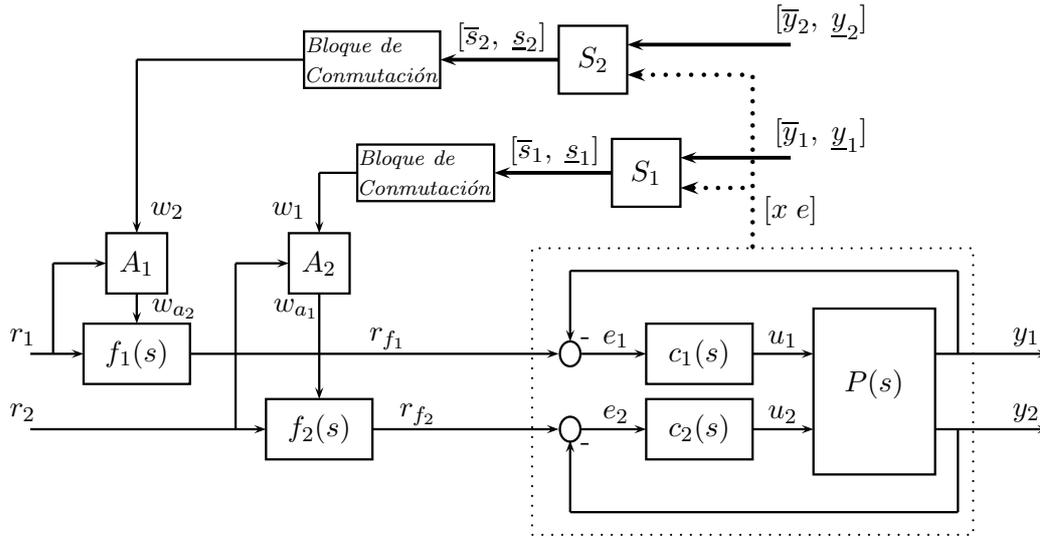


Figura 5.7: Sistema de control descentralizado con el lazo de acondicionamiento por MD propuesto

de:

- S_1 (S_2): en ellos se calculan las funciones de conmutación \underline{s}_1 y \bar{s}_1 (\underline{s}_2 y \bar{s}_2) a partir de las cotas inferiores y superiores para las interacciones \underline{y}_1 y \bar{y}_1 (\underline{y}_2 y \bar{y}_2), respectivamente.
- Bloque de conmutación: genera la señal discontinua w_1 (w_2) a partir de las funciones de conmutación \underline{s}_1 y \bar{s}_1 (\underline{s}_2 y \bar{s}_2).
- Bloque lógico A_1 (A_2): habilita el acondicionamiento de la referencia cuando r_1 (r_2) cambia, haciendo $w_{a2} = w_2$ ($w_{a1} = w_1$). Si r_1 (r_2) permanece inalterada, fuerza $w_{a2} = 0$ ($w_{a1} = 0$) evitando que la señal discontinua modifique la referencia.
- $f_1(s)$ y $f_2(s)$: son filtros lineales de primer orden, cuyas dinámicas son elegidas mucho más rápidas que la del lazo cerrado.

Se asume que el modelo del proceso $P(s)$ es conocido, y que tiene una realización mínima de la forma:

$$P(s) : \begin{cases} \dot{x}_p &= A_p x_p + B_p u \\ y &= C_p x_p + d, \end{cases} \quad (5.24)$$

donde las matrices A_p , B_p y C_p tienen dimensiones $n \times n$, $n \times 2$ y $2 \times n$ respectivamente. La entrada es $u = [u_1 \ u_2]^T$ y la salida $y = [y_1 \ y_2]^T$. Las perturbaciones a la salida son representadas por $d = [d_1 \ d_2]^T$. Como el objetivo del método es limitar el acoplamiento cruzado del sistema a lazo cerrado, será de interés evaluar qué sucede con el efecto de las perturbaciones d_j en la salida y_i ($j \neq i$).

El comportamiento dinámico de los filtros $f_1(s)$ – $f_2(s)$ se puede describir en forma compacta como:

$$F(s) : \begin{cases} \dot{x}_f &= A_f x_f + B_f r + B_w w_a \\ r_f &= C_f x_f, \end{cases} \quad (5.25)$$

siendo $A_f = -C_f = \text{diag}(\lambda_{f_1}, \lambda_{f_2})$, $B_f = I_2$ y B_w la matriz de permutación de 2×2 . También, $w_a = [w_{a1} \ w_{a2}]^T$, $r_f = [r_{f_1} \ r_{f_2}]^T$ y $r = [r_1 \ r_2]^T$.

El par de controladores descentralizados $c_1(s)$ - $c_2(s)$ tiene la siguiente realización en el espacio de estados:

$$C(s) : \begin{cases} \dot{x}_c &= A_c x_c + B_c e \\ u &= C_c x_c + D_c e, \end{cases} \quad (5.26)$$

donde A_c , B_c y C_c son matrices diagonales a bloques de dimensiones adecuadas, D_c es una matriz diagonal de 2×2 y $e = [e_1 \ e_2]^T$.

Luego, dado que $e = r_f - y$, la dinámica de lazo cerrado desde la referencia r_f hasta la salida del proceso y resulta:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B r_f + B_d d, \\ y &= Cx + d, \end{aligned} \quad (5.27)$$

donde $x = [x_p \ x_c]^T$ y

$$A = \begin{bmatrix} A_p - B_p D_c C_p & B_p C_c \\ -B_c C_p & A_c \end{bmatrix}, \quad B = -B_d = \begin{bmatrix} B_p D_c \\ B_c \end{bmatrix}, \quad C = [C_p \ 0]. \quad (5.28)$$

5.3.2. Descripción del método

Con el fin de limitar las interacciones del lazo cerrado mediante el acondicionamiento de la señal de referencia r_j ($j = 1, 2$), la señal discontinua w_i ($i = 1, 2$; $i \neq j$) es gobernada de acuerdo a la siguiente ley de conmutación (implementada en el *bloque de conmutación*):

$$\begin{cases} w_i = w_i^- & \text{si } \bar{s}_i < 0 \\ w_i = w_i^+ & \text{si } \underline{s}_i > 0 \\ w_i = 0 & \text{cualquier otro caso,} \end{cases} \quad i = 1, 2 \quad (5.29)$$

donde

$$\begin{aligned} \bar{s}_i(x, e_j, \bar{y}_i) &= \bar{\psi}_i(\bar{y}_i) - \gamma_i^\top x - \kappa_i e_j, \\ \underline{s}_i(x, e_j, \underline{y}_i) &= \underline{\psi}_i(\underline{y}_i) - \gamma_i^\top x - \kappa_i e_j. \end{aligned} \quad (5.30)$$

con $j \neq i$. La constante escalar no-nula κ_i y el vector fila de n elementos γ_i^\top determinan la dinámica de salida del lazo de acondicionamiento. $\tilde{\psi}_i$ son valores constantes que dependen de los límites tolerados para las interacciones cruzadas \tilde{y}_i (aquí también se usa $\tilde{\star}$ para denotar tanto $\bar{\star}$ como $\underline{\star}$).

Las cotas para las interacciones \tilde{y}_i pueden ser definidas por el diseñador del control como valores absolutos (por ejemplo, para modos de operación seguros) o bien como valores relativos al valor de la referencia r_i . En este último caso, $\bar{y}_i = r_i + \delta_i^+$ e $\underline{y}_i = r_i - \delta_i^-$, donde $[-\delta_i^-, \delta_i^+]$ es el rango de variación permitido en y_i ante cambios en la referencia r_j .

Notar que la presencia explícita de $e_j = r_{f_j} - y_j$ en (5.30) garantiza que las funciones de conmutación sean de grado relativo uno con respecto a w_i , verificándose entonces la condición necesaria para el establecimiento del MD.

Se supone aquí que las variables de estado asociadas con las superficies del modo deslizante son accesibles. Caso contrario, las mismas deberán ser estimadas a partir de algún observador de estados. De todas formas, esto no será necesario en las numerosas aplicaciones prácticas que pueden ser representadas con un reducido número de estados accesibles.

Ahora, con el objetivo de reescribir (5.30) en términos de los estados canónicos del lazo cerrado, se elige:

- $\kappa_i = k_{\rho_{ij}+1}^i c_i A^{\rho_{ij}-1} b_j$, siendo c_i la i -ésima fila de C , b_j la j -ésima columna de B y ρ_{ij} el grado relativo de la función de transferencia entre la referencia filtrada r_{f_j} y la salida y_i .
- $\gamma_i^\top = \Gamma_i^\top \cdot O_{(i,\rho_{ij}+1)} + \Phi_i^\top$, donde $\Gamma_i = [k_1^i \ \dots \ k_{\rho_{ij}+1}^i]^\top$ es un vector de ganancias constantes con su primer elemento $k_1^i = 1$, y $\Phi_i = [0 \ \dots \ 0 \ \kappa_i c_j]^\top$. A su vez,

$$O_{(i,\rho_{ij}+1)} = \begin{bmatrix} c_i \\ c_i A \\ \dots \\ c_i A^{\rho_{ij}} \end{bmatrix}, \quad (5.31)$$

es una matriz conformada por las primeras $\rho_{ij} + 1$ filas de la matriz de observabilidad del subsistema con salida y_i .

- $\tilde{\psi}_i(\tilde{y}_i) = \tilde{y}_i - k_{\rho_{ij}+1}^i C$, donde la constante $C = c_i A^{(\rho_{ij}-1)} b_i r_{f_i}$ es cero si $\rho_{ij} \neq \rho_{ii}$.

Las funciones de conmutación $\overline{s}_i(x, e_j, \overline{y}_i)$ y $\underline{s}_i(x, e_j, \underline{y}_i)$ pueden reescribirse ahora en términos de las salidas del sistema y sus derivadas, tal como se planteó en el Capítulo 3 para salidas de grado relativo mayor que uno con respecto a la acción discontinua:

$$\tilde{s}_i(x, e_j, \tilde{y}_i) = \tilde{y}_i - y_i - \sum_{\alpha=1}^{\rho_{ij}} k_{\alpha+1}^i y_i^{(\alpha)}. \quad (5.32)$$

Esta forma, aparte de ser más intuitiva que (5.30), es de utilidad para obtener la dinámica con que evolucionan las salidas del sistema durante la operación por MD.

De acuerdo con la ley de conmutación (5.29), la señal discontinua w_i conmuta entre w_i^- y 0 desde un lado al otro de la superficie $\overline{s}_i = 0$, y entre w_i^+ y 0 a cada lado de la superficie $\underline{s}_i = 0$. Por lo tanto, en la región comprendida entre las superficies $\overline{s}_i = 0$ y $\underline{s}_i = 0$ las trayectorias evolucionan con la dirección propia del sistema, pero fuera de esta región lineal las trayectorias son forzadas a un cambio de dirección. De esta manera, el MD se establece solamente cuando existe riesgo de sobrepasar los límites definidos para las interacciones cruzadas.

Los valores w_i^+ y w_i^- deben ser diseñados de manera que satisfagan la condición necesaria y suficiente (3.27) para el establecimiento del MD, que en este caso viene dada por

$$w_i^- \leq w_{eq_i} \leq w_i^+, \quad (5.33)$$

donde w_{eq_i} representa el control continuo equivalente necesario para mantener al sistema operando sobre la superficie de deslizamiento $\tilde{s}_i = 0$. Dado que $\tilde{s}_i(x, e_j, \tilde{y}_i)$ es de grado relativo unitario con respecto a w_i , y como $\dot{\tilde{s}}_i(x, e_j, \tilde{y}_i) = 0$ durante el MD, la expresión de

w_{eq_i} puede obtenerse derivando (5.30) o (5.32) con respecto al tiempo e igualando a cero. Esto lleva a:

$$w_{eq_i} = [\kappa_i \lambda_{f_j}]^{-1} \{ \gamma_i^\top A x + (\gamma_i^\top b_j + \kappa_i \lambda_{f_j}) r_{f_j} - \gamma_i^\top b_j d_j - \kappa_i (\lambda_{f_j} r_j + y_j) + \gamma_i^\top b_i r_{f_i} \}. \quad (5.34)$$

De las ecuaciones (5.33) y (5.34) pueden obtenerse valores de w_i^\pm que aseguren el establecimiento del MD en ciertos dominios de las superficies de deslizamiento (determinados por cotas adecuadas sobre x , r_j , d_j y \dot{d}_j), de forma tal que cuando la salida y_i del proceso esté por alcanzar uno de sus límites de acoplamiento el MD se establezca evitando que esto suceda.

De todas formas, como en el acondicionamiento de la referencia los valores de la señal que se necesita modificar son en general conocidos, es razonable elegir valores del orden de los cambios esperables en el set-point para w_i^\pm (teniendo en cuenta alguna cota para las perturbaciones a la salida). Por otro lado, también aquí la elección de w_i^\pm puede hacerse en forma conservativa porque el MD está restringido a la etapa de baja potencia del sistema de control (véase comentario 4.1).

5.3.3. Dinámica de salida durante el MD

Como todos los procesos reales se representan mediante modelos estrictamente propios, y todos los controladores realizables son propios (en particular, los controladores P, PI y PID realizables), la función de transferencia entre y_i y r_{f_j} será siempre estrictamente propia ($\rho_{ij} \geq 1$). Luego, considerando en (5.27)–(5.28) como única salida a y_i y como entradas a r_{f_j} y la perturbación d_j , e incluyendo también la dinámica de los filtros, se obtiene la siguiente representación canónica normal:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = z_3 \\ \dots = \dots \\ \dot{z}_{\rho_{ij}-1} = z_{\rho_{ij}} \\ \dot{z}_{\rho_{ij}} = a_\xi \xi + a_\eta \eta + c_i A^{(\rho_{ij}-1)} b_j (r_{f_j} - d_j) + \mathcal{C} \\ \dot{\eta} = P\xi + Q\eta \\ \dot{r}_{f_j} = \lambda_{f_j} (r_{f_j} - r_j - w_{ai}) \\ y_i = z_1, \end{array} \right. \quad (5.35)$$

donde $\xi = [z_1 \ z_2 \ \dots \ z_{\rho_{ij}}]^T$ contiene la salida y_i y sus primeras $(\rho_{ij} - 1)$ derivadas, $\eta = [z_{\rho_{ij}+1} \ \dots \ z_{n_{ij}}]^T$ son $(n_{ij} - \rho_{ij})$ estados linealmente independientes (n_{ij} orden de la transferencia entre y_i y r_{f_j}) y $c_i A^{(\rho_{ij}-1)} b_j$ una constante no-nula. Los ceros de la función de transferencia entre r_{f_j} e y_i son los autovalores de Q , y por lo tanto determinan la dinámica escondida del lazo cerrado.

Reescribiendo ahora (5.32) en función de los estados $x_{cl} = [\xi \ \eta \ r_{f_j}]^T$ de la representación (5.35) e igualando a cero ambas funciones de conmutación, se llega a la siguiente expresión

para las superficies de deslizamiento:

$$\tilde{s}_i = \tilde{y}_i - y_i - \sum_{\alpha=2}^{\rho_{ij}} k_{\alpha}^i z_{\alpha} - k_{\rho_{ij}+1}^i (a_{\xi} \xi + a_{\eta} \eta + c_i A^{(\rho_{ij}-1)} b_j (r_{f_j} - d_j) + \mathcal{C}) = 0. \quad (5.36)$$

Cuando el sistema opera en MD, la dinámica (5.35) se vuelve redundante. En efecto, (5.36) establece una relación lineal entre $(r_{f_j} - d_j)$ y los estados ξ y η , que si se reemplaza en (5.35) resulta:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ \dots &= \dots \\ \dot{z}_{\rho_{ij}-1} &= z_{\rho_{ij}} \\ \dot{z}_{\rho_{ij}} &= (\tilde{y}_i - y_i - \sum_{\alpha=2}^{\rho_{ij}} k_{\alpha}^i z_{\alpha}) / k_{\rho_{ij}+1}^i \\ \dot{\eta} &= P\xi + Q\eta. \end{cases} \quad (5.37)$$

Luego, la dinámica con que y_i tiende a su límite \tilde{y}_i durante el MD sólo depende de los valores k_{α}^i escogidos en el diseño de las superficies de deslizamiento. Consecuentemente, el diseñador del sistema de control podrá limitar la amplitud de las interacciones a $|\tilde{y}_i - r_i|$, con \tilde{y}_i como parámetro de diseño.

Por otro lado, como se ha mencionado, la dinámica escondida durante el MD está gobernada por los autovalores de Q , es decir, los ceros de la función de transferencia entre r_{f_j} e y_i . Luego, para que la dinámica escondida durante el MD sea estable, los elementos no-diagonales de la matriz de transferencia del lazo cerrado ($T(s)$) no deberán tener ceros en el SPD.

5.3.4. Comportamiento en presencia de perturbaciones a la salida

Como fue comentado en la introducción, este capítulo se centra en la limitación de los efectos indeseados en el i -ésimo lazo de un sistema de control multi-lazo debido a cambios en el j -ésimo lazo del sistema ($j \neq i$). Por ello, sólo se consideran perturbaciones en el lazo j -ésimo, a fin de evaluar cómo se comporta el método con el acoplamiento que la perturbación d_j produce en la salida y_i . Con este objetivo, la ecuación de estados del lazo de acondicionamiento se puede obtener a partir de (5.25) y (5.27)–(5.28), resultando:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + b_j c_j & b_j \\ 0^{\top} & \lambda_{f_j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_i r_{f_i} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_{f_j} (y_j - r_j) - \dot{y}_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_{f_j} w_{a_i} \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

El segundo término del miembro derecho de (5.38) es constante debido a que r_{f_i} no varía. Por su parte, los últimos dos términos se pueden interpretar como los vectores de perturbación y control del lazo de acondicionamiento, respectivamente. Consecuentemente, la perturbación satisface la *condición vinculante*, es decir, $[0 \ \lambda_{f_j} (y_j - r_j) - \dot{y}_j]^{\top} \in \text{span}([0 \ \lambda_{f_j} w_{a_i}]^{\top})$. Luego, como se verifica en (5.37), el acondicionamiento por MD presenta invarianza fuerte a las perturbaciones de salida d_j y sus derivadas \dot{d}_j (incluidas en y_j y \dot{y}_j) siempre que la

condición (5.33) se mantenga. Esta última condición requiere que d_j y \dot{d}_j estén acotadas, lo cuál es común en la práctica.

Por lo tanto, para perturbaciones a la salida d_j acotadas y suaves la dinámica de la salida y_i queda completamente gobernada por las ganancias k_α^i mientras el lazo de MD esté activo.

5.3.5. Comentarios adicionales

- i) Tal como se ha explicado en capítulos anteriores, las interacciones cruzadas entre lazos pueden ser eliminadas mediante un controlador centralizado que desacople el sistema. Sin embargo, para la gran mayoría de los procesos industriales multivariables que ya están controlados mediante estructuras descentralizadas, esto implicaría tener que cambiar por completo el sistema de control. El método propuesto permite limitar las interacciones cruzadas sin tener que cambiar ni la estructura del control ni la sintonización de los controladores descentralizados pre-existentes. Naturalmente, debido a las limitaciones inherentes al control descentralizado, no debe esperarse una performance de lazo cerrado como la que se podría obtener con un control multivariable centralizado.
- ii) Al permitir cierto grado de acoplamiento en todos los canales, la metodología propuesta relaja el efecto de esparcimiento de los ceros en el SPD que provocaría un desacoplamiento dinámico completo en los sistemas de fase no mínima.
- iii) Tampoco hay problemas relacionados con el *modo de alcance* ni con el *chattering* en la presente aplicación. En el primer caso, porque aquí también el comportamiento deseado es que el sistema opere en la región delimitada por las superficies de deslizamiento (sin alcanzar los límites de las interacciones), y por lo tanto no se aplica ninguna acción de control para llevar el sistema a estas superficies. Respecto al *chattering*, su efecto puede despreciarse, ya que a pesar de que exista dinámica de la planta no modelada, la realimentación del error e garantiza el cumplimiento de la condición de transversalidad. Además, la conmutación en baja potencia puede realizarse a frecuencias muy elevadas.

5.4. Ejemplos

5.4.1. Tanque cuádruple

Considérese ahora el proceso multivariable con un cero ajustable conocido como *tanque cuádruple*. El mismo fue presentado en (Johansson, 2000), y ha sido utilizado en los últimos años para evaluar los resultados de diferentes estrategias de control multivariable. La Figura 5.8 presenta un diagrama esquemático del tanque cuádruple.

En primer lugar, examinaremos las propiedades de esta planta de laboratorio. En particular, nos interesa analizar de qué parámetros dependen algunas de las características que hemos estudiado, como ser la ubicación de los ceros de transmisión o el RGA del sistema. A continuación, se aplicará el método propuesto para una configuración en la que el sistema es muy difícil de controlar.

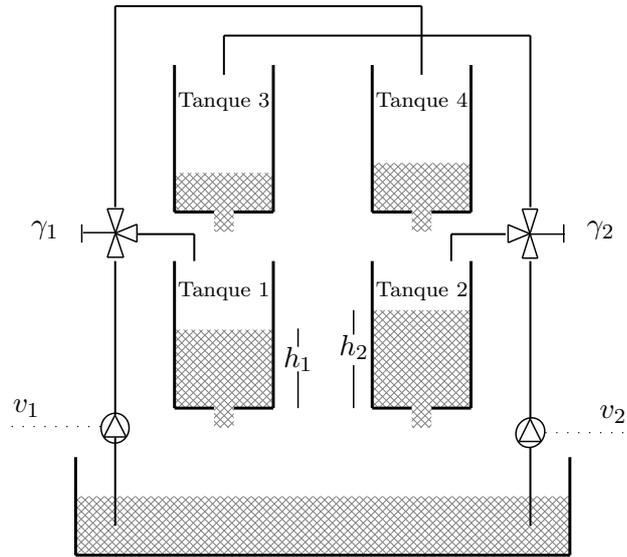


Figura 5.8: Diagrama esquemático del tanque cuádruple

Análisis de la planta

El modelo no-lineal del tanque cuádruple, obtenido a partir del balance de masas y la ley de Bernoulli está dado por

$$\begin{aligned}
 \frac{dh_1}{dt} &= -\frac{a_1}{A_1} \sqrt{2gh_1} + \frac{a_3}{A_1} \sqrt{2gh_3} + \frac{\gamma_1 k_1}{A_1} v_1, \\
 \frac{dh_2}{dt} &= -\frac{a_2}{A_2} \sqrt{2gh_2} + \frac{a_4}{A_2} \sqrt{2gh_4} + \frac{\gamma_2 k_2}{A_2} v_2, \\
 \frac{dh_3}{dt} &= -\frac{a_3}{A_3} \sqrt{2gh_3} + \frac{(1-\gamma_2)k_2}{A_3} v_2, \\
 \frac{dh_4}{dt} &= -\frac{a_4}{A_4} \sqrt{2gh_4} + \frac{(1-\gamma_1)k_1}{A_4} v_1,
 \end{aligned} \tag{5.39}$$

donde h_i representa el nivel de agua en cada tanque. A_i y a_i son las secciones transversales de los tanques y de los orificios de salida, respectivamente. Las constantes $\gamma_1, \gamma_2 \in (0, 1)$ quedan determinadas de acuerdo a la posición de dos válvulas divisoras de caudal. Las salidas del proceso son señales en Volts generadas por los sensores en los tanques inferiores ($y_1 = k_c h_1$ y $y_2 = k_c h_2$), mientras que las entradas al sistema son los voltajes v_i aplicados a las dos bombas (el caudal correspondiente es $k_i v_i$).

Los valores de los parámetros del sistema se presentan en la Tabla 5.1 para los dos puntos de operación considerados en Johansson (2000): $P-$, para el cuál el sistema presenta características de mínima fase, y $P+$, en el cuál se comporta como un sistema de no-mínima fase.

Si se definen las variables $x_i = h_i - h_i^0$ y $u_i = v_i - v_i^0$, el modelo del proceso linealizado en torno a un punto de operación genérico tiene la siguiente expresión en el espacio de estados:

Parámetros fijos	Notación	Valor
Sección transversal de los tanques	A_1, A_3	28 cm^2
	A_2, A_4	32 cm^2
Sección transversal de los orificios de salida	a_1, a_3	$0,071 \text{ cm}^2$
	a_2, a_4	$0,057 \text{ cm}^2$
Factor de proporcionalidad de los sensores	k_c	$0,5 \text{ V/cm}$
Aceleración de la gravedad	g	981 cm/s^2
Parámetros en P-	Notación	Valor en P-
Niveles de agua en el punto de operación	$(h_1^0; h_2^0; h_3^0; h_4^0)$	$(12,4; 12,7; 1,8; 1,4) \text{ cm}$
Tensión de entrada a las bombas	$(v_1^0; v_2^0)$	$(3,00; 3,00) \text{ V}$
Constantes Caudal/Voltaje	$(k_1; k_2)$	$(3,33; 3,35) \text{ cm}^3/\text{Vs}$
Posición de las válvulas	$(\gamma_1; \gamma_2)$	$(0,7; 0,6)$
Parámetros en P+	Notación	Valor en P+
Niveles de agua en el punto de operación	$(h_1^0; h_2^0; h_3^0; h_4^0)$	$(12,6; 12,4; 4,8; 4,9) \text{ cm}$
Tensión de entrada a las bombas	$(v_1^0; v_2^0)$	$(3,15; 3,15) \text{ V}$
Constantes Caudal/Voltaje	$(k_1; k_2)$	$(3,14; 3,29) \text{ cm}^3/\text{Vs}$
Posición de las válvulas	$(\gamma_1; \gamma_2)$	$(0,43; 0,34)$

Tabla 5.1: Parámetros del tanque cuádruple para las configuraciones de MF ($P-$) y NMF ($P+$).

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{dt} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_1} & 0 & \frac{A_3}{A_1 T_3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T_2} & 0 & \frac{A_4}{A_2 T_4} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{T_4} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{\gamma_1 k_1}{A_1} & 0 \\ 0 & \frac{\gamma_2 k_2}{A_2} \\ 0 & \frac{(1-\gamma_2)k_2}{A_3} \\ \frac{(1-\gamma_1)k_1}{A_4} & 0 \end{bmatrix} u, \\
 y^\delta &= \begin{bmatrix} k_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_c & 0 & 0 \end{bmatrix} x,
 \end{aligned} \tag{5.40}$$

donde

$$T_i = \frac{A_i}{a_i} \sqrt{\frac{2h_i^0}{g}}, \quad i = 1, \dots, 4 \tag{5.41}$$

son las constantes de tiempo, que para cada punto de operación toman los siguientes valores:

Constante de tiempo	P-	P+
(T_1, T_2)	$(62, 90)$ seg	$(63, 91)$ seg
(T_3, T_4)	$(23, 30)$ seg	$(39, 56)$ seg

En el dominio frecuencial, la correspondiente matriz de transferencia es:

$$P(s) = \begin{bmatrix} \frac{\gamma_1 T_1 k_1 k_c}{A_1(1 + T_1 s)} & \frac{(1 - \gamma_2) T_1 k_1 k_c}{A_1(1 + T_1 s)(1 + T_3 s)} \\ \frac{(1 - \gamma_1) T_2 k_2 k_c}{A_2(1 + T_2 s)(1 + T_4 s)} & \frac{\gamma_2 T_2 k_2 k_c}{A_2(1 + T_2 s)} \end{bmatrix}. \quad (5.42)$$

Los ceros de esta matriz de transferencia son las raíces del polinomio numerador de

$$\det(P(s)) = \frac{\gamma_1 \gamma_2 T_1 T_2 k_1 k_2 k_c^2}{A_1 A_2 \prod_{i=1}^4 (1 + sT_i)} \left[(1 + sT_3)(1 + sT_4) - \frac{(1 - \gamma_1)(1 - \gamma_2)}{\gamma_1 \gamma_2} \right]. \quad (5.43)$$

Llamando

$$k = \frac{(1 - \gamma_1)(1 - \gamma_2)}{\gamma_1 \gamma_2} \in (0, \infty), \quad (5.44)$$

los ceros del sistema serán los valores de s que verifiquen

$$(1 + sT_3)(1 + sT_4) - k = 0. \quad (5.45)$$

Es decir, que el sistema tiene dos ceros multivariables. A partir de un análisis del lugar de raíces (complementario), se deduce rápidamente que uno de los ceros estará siempre en el SPI, mientras que el otro podrá estar tanto en el SPI como en el SPD dependiendo del valor de k (y por lo tanto, de γ_1 y γ_2).

Si k es pequeño, los dos ceros estarán próximos a $s = -1/T_3$ y $s = -1/T_4$. A medida que k tiende a infinito, un cero tiende a $+\infty$ y el otro a $-\infty$. Pero nótese de (5.45) que cuando $k = 1$ uno de los ceros estará en el origen. Por (5.44) $k = 1$ implica que $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$.

Entonces, según el razonamiento anterior:

$$\begin{aligned} 0 < \gamma_1 + \gamma_2 < 1 &\longrightarrow \text{Sistema de NMF} \\ 1 < \gamma_1 + \gamma_2 < 2 &\longrightarrow \text{Sistema de MF} \end{aligned}$$

Estas dos regiones se muestran en la Figura 5.9 divididas por la recta de trazo continuo que une los puntos $(\gamma_1, \gamma_2) = (0, 1)$ y $(\gamma_1, \gamma_2) = (1, 0)$. Físicamente, para caudales semejantes en las dos bombas, el sistema será de NMF cuando el caudal hacia los tanques superiores sea mayor que el dirigido a los tanques inferiores ($\gamma_1 + \gamma_2 < 1$). Contrariamente, si el caudal

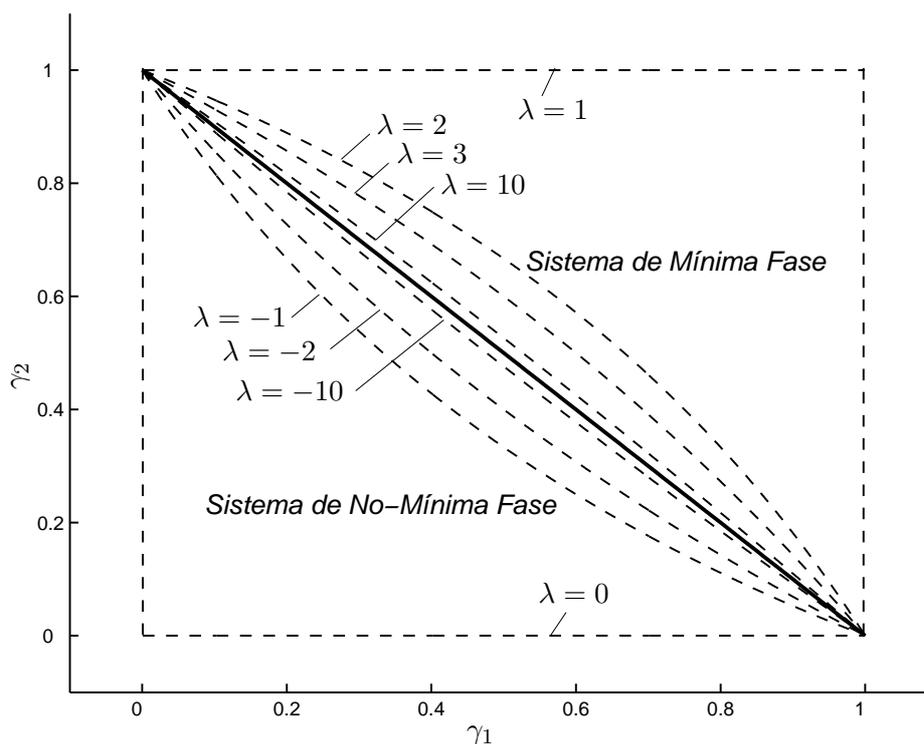


Figura 5.9: Regiones en que el sistema es de MF o de NMF dependiendo de la posición de las válvulas γ_1 y γ_2

hacia los tanques 1 y 2 es mayor que hacia los tanques 3 y 4 ($\gamma_1 + \gamma_2 > 1$), el sistema será de MF.

Por otro lado, el RGA de (5.42) queda determinado por el índice de interacción de Bristol

$$\lambda = \frac{p_{11}(0)p_{22}(0)}{p_{11}(0)p_{22}(0) - p_{12}(0)p_{21}(0)} = \frac{-\gamma_1\gamma_2}{1 - \gamma_1\gamma_2}. \quad (5.46)$$

Como puede observarse, λ depende únicamente de la posición de las válvulas divisoras de caudal.

Las curvas en trazo discontinuo de la Figura 5.9 muestran los lugares geométricos en el plano (γ_1, γ_2) correspondientes a distintos valores del índice de Bristol. A medida que $\gamma_1 + \gamma_2$ tiende a 1 (línea continua), $|\lambda|$ se hace mayor. Notar a su vez de (5.46) que no existen $\gamma_1, \gamma_2 \in [0, 1]$ tal que $\lambda \in [0, 1]$.

La situación desfavorable $\lambda < 0$ se da para $0 < \gamma_1 + \gamma_2 < 1$; es decir, para las configuraciones en que el sistema presenta características de no mínima fase, lo cual es evidente a partir de la interpretación física del proceso. En este caso, hemos visto que para el control descentralizado es conveniente modificar el apareo o la estructura del control. Si se intercambian las

salidas del proceso, el índice de interacción de Bristol resultante es

$$\lambda' = \frac{(1 - \gamma_1)(1 - \gamma_2)}{1 - \gamma_1 - \gamma_2}. \quad (5.47)$$

Obsérvese que ahora $\lambda' > 0$ para $0 < \gamma_1 + \gamma_2 < 1$.

Aplicación del método a la configuración de NMF

Reemplazando en (5.42) los valores de los parámetros para el punto de operación P_+ se llega a la siguiente matriz de transferencia

$$P_+(s) = \begin{bmatrix} \frac{1,5}{1 + 63s} & \frac{2,5}{(1 + 39s)(1 + 63s)} \\ \frac{2,5}{(1 + 56s)(1 + 91s)} & \frac{1,6}{1 + 91s} \end{bmatrix}. \quad (5.48)$$

Es fácil verificar que la matriz de transferencia $P_+(s)$ tiene un cero de transmisión en $s = 0,013$, mientras que su RGA es:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -0,6356 & 1,6356 \\ 1,6356 & -0,6356 \end{bmatrix}. \quad (5.49)$$

Claramente, el RGA sugiere que debería elegirse un apareo diferente entre las entradas y salidas del sistema. Esto lo verifican las grandes interacciones que pueden observarse en las simulaciones realizadas en (Johansson, 2000) con controladores PI descentralizados, donde precisamente no se modificó la estructura de control original.

Dado que no requiere ningún esfuerzo adicional, como primera medida en vistas a reducir la amplitud de las interacciones, se permutaron aquí las salidas del sistema. En este caso, el RGA está dado por la matriz que resulta de permutar la primera y segunda fila de (5.49), pasando entonces el índice de Bristol a ser mayor que cero ($\lambda > 0$).

Como se explica en (Johansson, 2000), si bien la sintonización manual de los controladores resulta sencilla para la configuración de MF (P_-), encontrar ganancias de los controladores que den respuestas aceptables es mucho más difícil en el seteo de NMF (P_+). En efecto, los controladores PI que se utilizaron en la referencia citada para la planta $P_+(s)$ original (sin permutar) no logran estabilizar la planta permutada. Por tanto, los mismos fueron re-sintonizados, encontrándose que los siguientes controladores PI descentralizados

$$C_1(s) = 0,15 \cdot \left(1 + \frac{1}{50s}\right), \quad C_2(s) = 0,25 \cdot \left(1 + \frac{1}{30s}\right), \quad (5.50)$$

dan respuestas aceptables. En comparación a las respuestas obtenidas en (Johansson, 2000), con (5.50) se obtienen menores tiempos de establecimiento y menor amplitud de las interacciones. Sin embargo, cabe destacar que la sintonización de los controladores PI no es de por sí el objetivo de este capítulo. De hecho, la misma seguramente pueda mejorarse mediante alguna técnica avanzada de sintonización. Aquí lo que se busca es limitar las interacciones

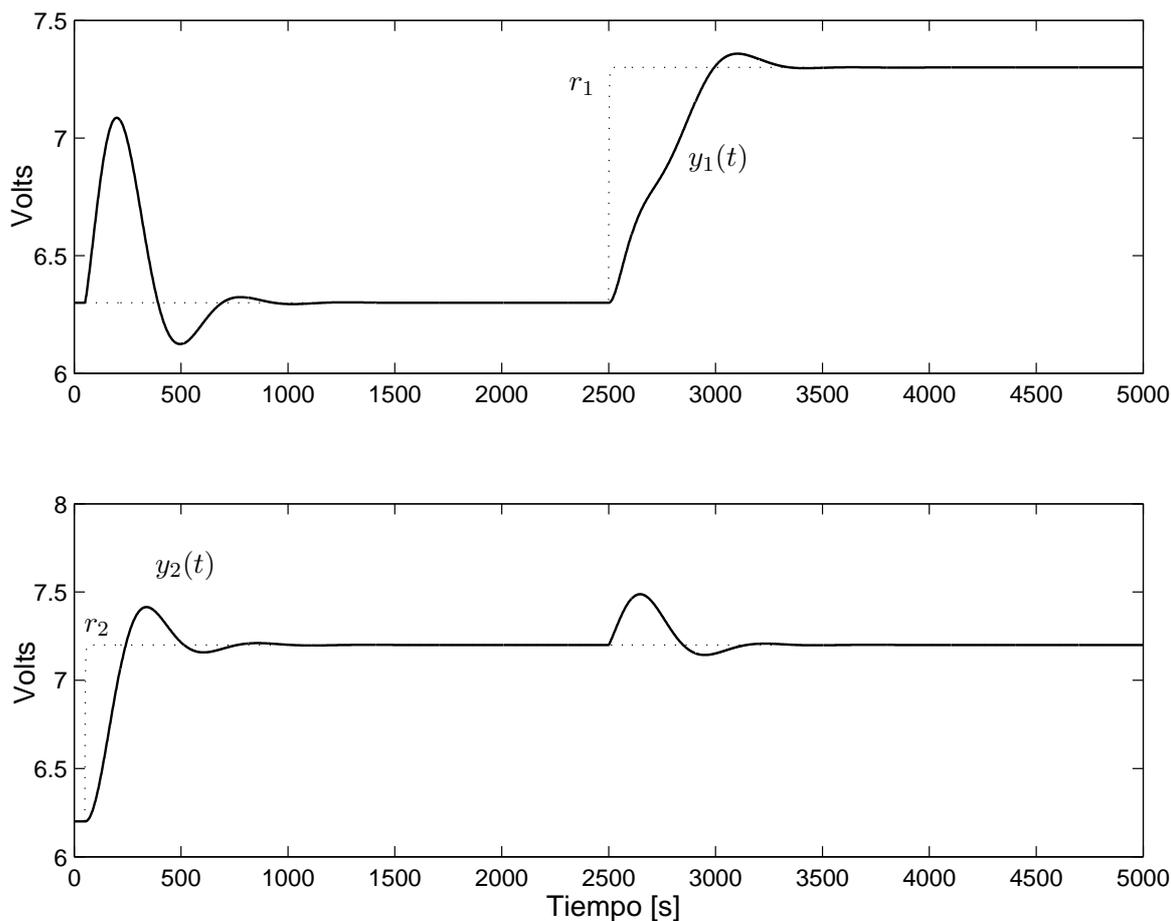


Figura 5.10: Señales de salida y con control descentralizado para escalones en r_1 ($t = 2500s$) y r_2 ($t = 50s$).

cruzadas en sistemas descentralizados de control, cualquiera sea el método utilizado para diseñar los controladores en cada lazo.

A fin de evaluar el método propuesto para lograr este objetivo, se agregaron al sistema filtros $f_1(s)$ y $f_2(s)$ como los descritos en (5.25). Para este ejemplo, $f_1(s)$ y $f_2(s)$ se tomaron idénticos, siendo sus autovalores $\lambda_{f_1} = \lambda_{f_2} = -0,5$.

El sistema a lazo cerrado con los controladores (5.50) fue entonces excitado con un escalón unitario en r_2 ($t = 50s$), y posteriormente con otro escalón unitario en r_1 ($t = 2500s$). La respuesta del sistema a lazo cerrado para esa señal de entrada se muestra en línea continua en la Figura 5.10, junto con las señales de referencia r_1 y r_2 (línea punteada delgada). Como puede notarse, el lazo cerrado presenta grandes interacciones aún para la estructura de control permutada, particularmente desde la entrada r_2 a la salida y_1 .

Para reducir estas interacciones, se aplicó el método propuesto en la sección anterior con límites a las interacciones $\delta_1^+ = \delta_2^+ = \delta_1^- = \delta_2^- = 0,2$. Las cuatro superficies de deslizamiento

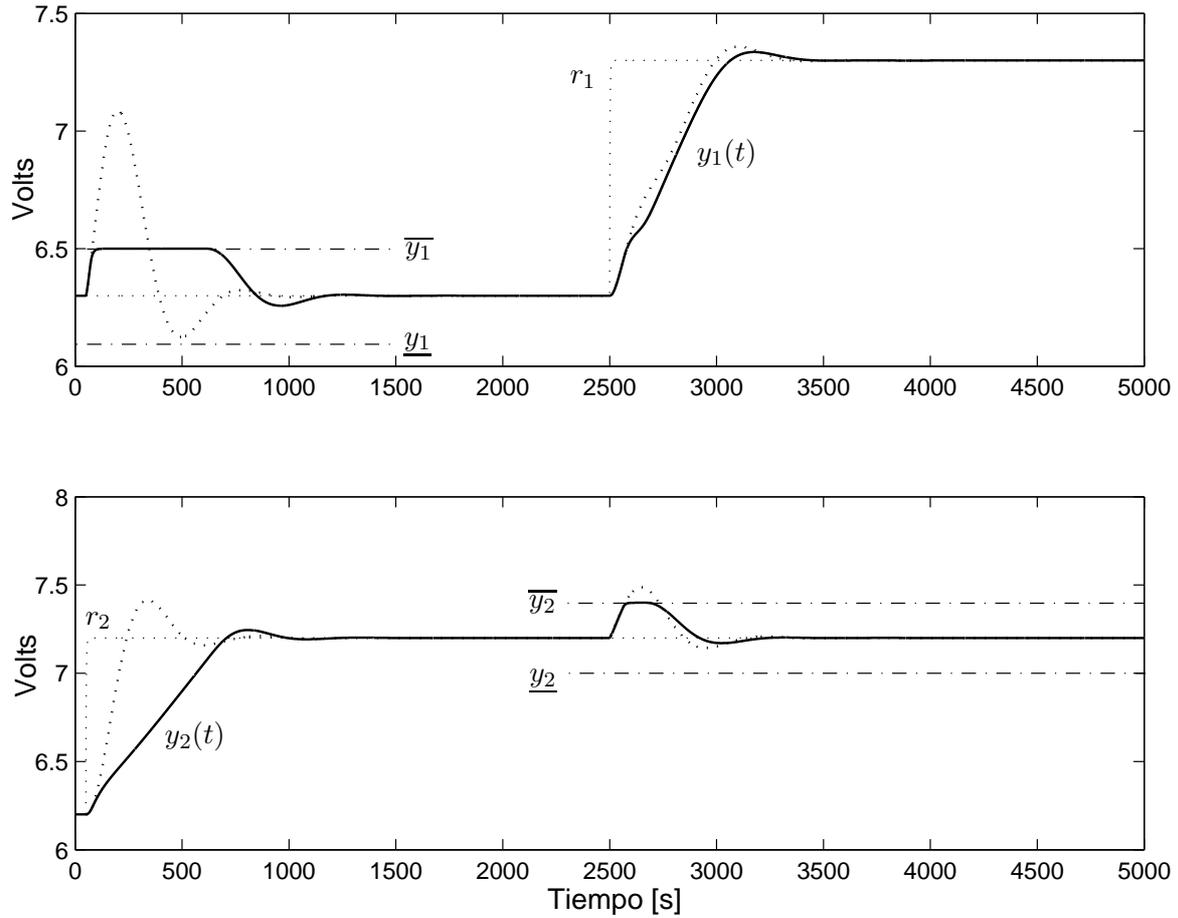


Figura 5.11: Señales de salida y con (línea continua) y sin (línea punteada) compensación por MD para escalones en r_1 ($t = 2500s$) y r_2 ($t = 50s$).

diseñadas pueden escribirse como:

$$\begin{cases} \overline{s_1} = r_1 + \delta_1^+ - c_1 x - 10 c_1 (A + b_2 c_2) x - 10 c_1 b_2 e_2 = 0 \\ \underline{s_1} = r_1 - \delta_1^- - c_1 x - 10 c_1 (A + b_2 c_2) x - 10 c_1 b_2 e_2 = 0 \end{cases} \quad (5.51)$$

$$\begin{cases} \overline{s_2} = r_2 + \delta_2^+ - c_2 x - 10 c_2 (A + b_1 c_1) x - 10 c_2 b_1 e_1 = 0 \\ \underline{s_2} = r_2 - \delta_2^- - c_2 x - 10 c_2 (A + b_1 c_1) x - 10 c_2 b_1 e_1 = 0 \end{cases} \quad (5.52)$$

donde las ganancias $k_2^1 = 10$ y $k_2^2 = 10$ fueron elegidas para una constante de tiempo del lazo de corrección de aproximadamente $10s$ durante el MD. A , B y C son las matrices de la representación en el espacio de estados del lazo cerrado, siendo c_i (b_i) la i -ésima fila (columna) de la matriz C (B). Las señales discontinuas w_1 y w_2 , generadas en los bloques de conmutación, conmutan de acuerdo a la ley de conmutación (5.29), siendo para este ejemplo $w_1^- = w_2^- = -1$ y $w_1^+ = w_2^+ = 1$.

Los resultados obtenidos con la técnica propuesta se presentan en línea continua en la Figura 5.11. Tal como se demostró anteriormente, las interacciones quedan acotadas a los límites pre-establecidos, reduciéndose así el acoplamiento del sistema. La Figura 5.12 muestra

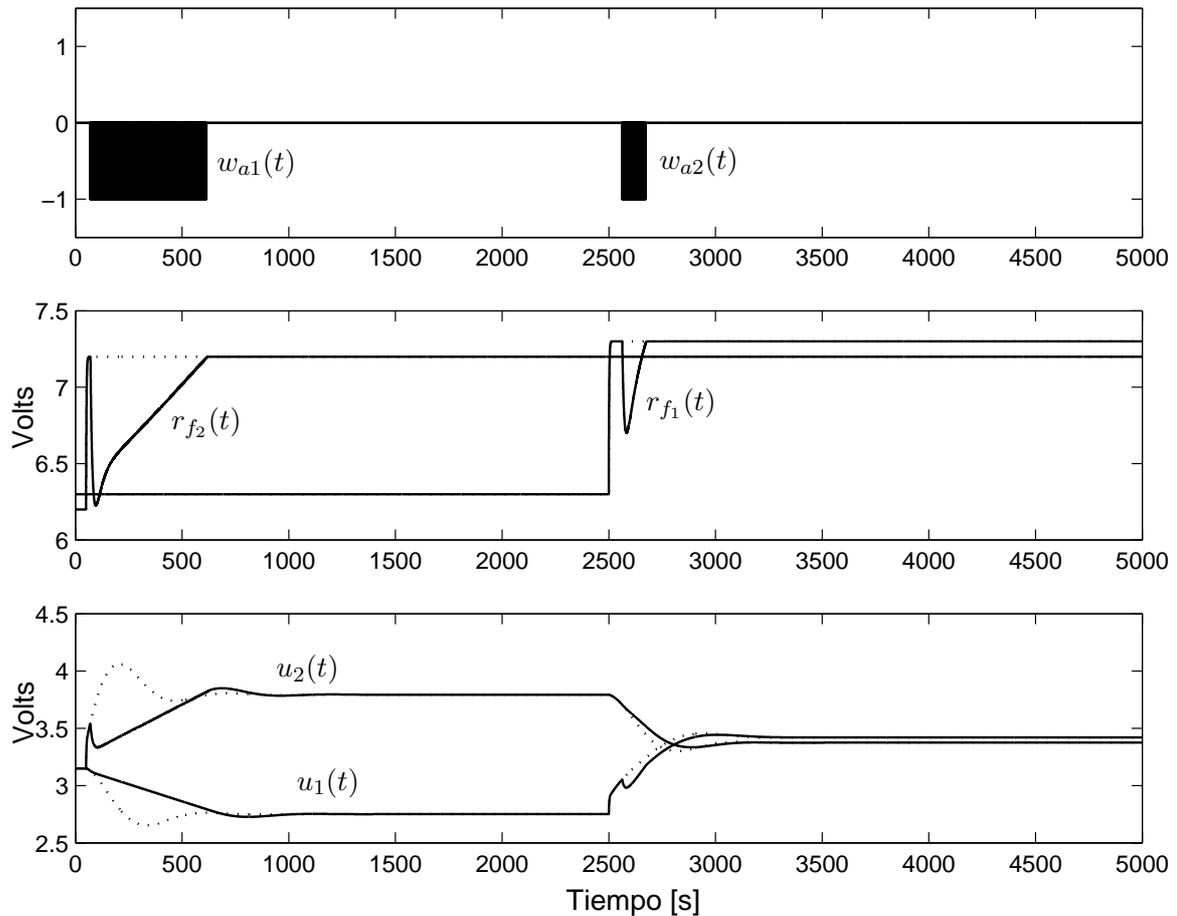


Figura 5.12: Señales discontinuas w_a después de los bloques lógicos, referencias filtradas r_f y salidas del controlador u con (línea continua) y sin (línea punteada) compensación por MD, correspondiente a la Figura 5.11.

la evolución temporal de las señales discontinuas, las referencias filtradas y las acciones de control correspondientes a la Figura 5.11. Después del escalón en r_2 , se establece un régimen deslizante sobre la superficie $\bar{s}_1 = 0$ justo antes de que y_1 alcance el límite superior de la interacción. Desde ahí, la salida y_1 tiende a su límite \bar{y}_1 con la dinámica impuesta por la constante k_2^1 de $\bar{s}_1 = 0$. Este MD modifica la referencia r_{f2} de forma tal de evitar una interacción mayor, hasta que y_1 retorna a la región lineal. Posteriormente, a partir de la respuesta del sistema al escalón en r_1 , se establece un nuevo MD, esta vez por un período más corto (ver la conmutación de $w_{a2}(t)$) y sobre la superficie $\bar{s}_2 = 0$. Aquí también se evidencia la limitación en amplitud de la interacción cruzada.

Nótese que aunque no se muestra en las figuras, cuando se realizan cambios de set-point de menor amplitud (o cuando el efecto cruzado es menor) el sistema con compensación por MD se comporta exactamente igual que el sistema original (sin la compensación por MD).

Se ha evaluado también cómo el método limita los efectos cruzados de las perturbaciones a la salida. Los resultados de simulación obtenidos se presentan en las figuras 5.13 y 5.14.

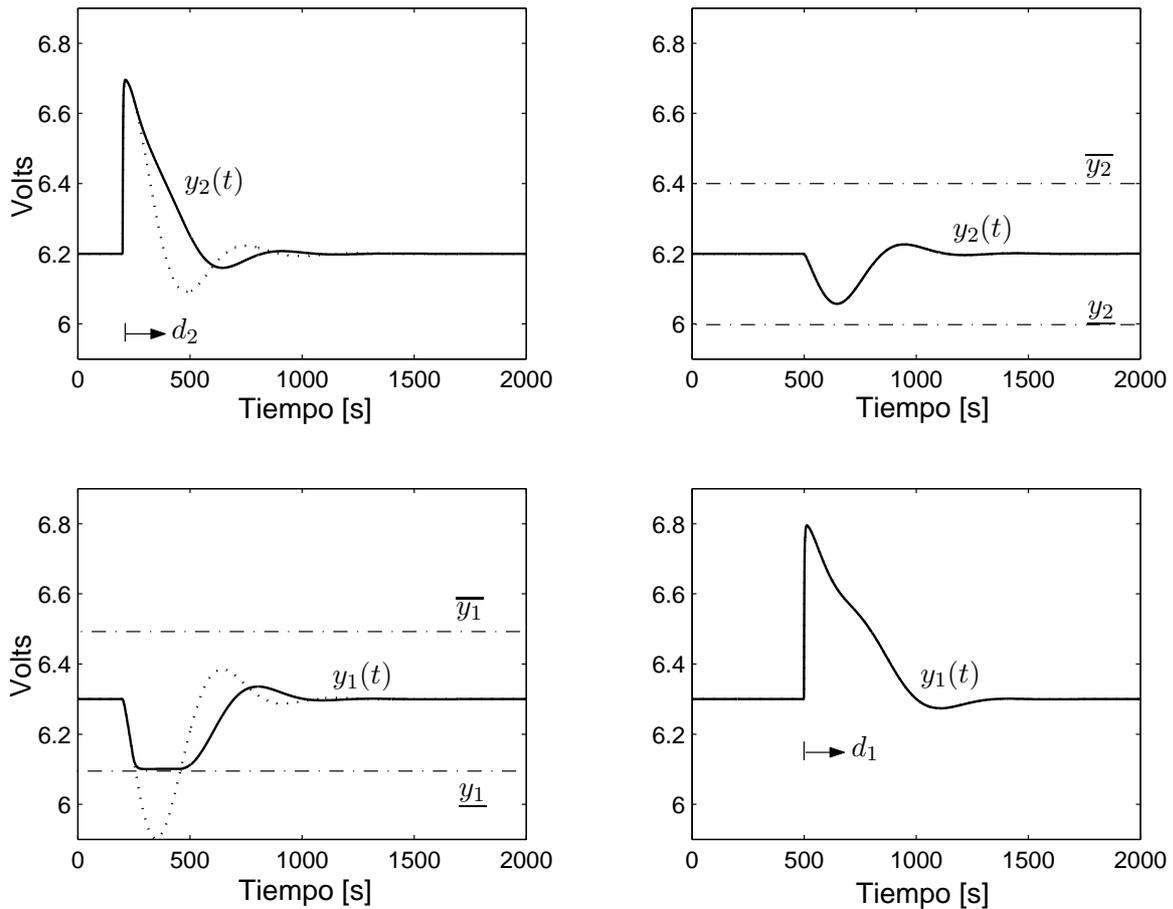


Figura 5.13: Señales de salida y con (línea continua) y sin (línea punteada) compensación por MD ante perturbaciones de tipo escalón en una de las salidas.

Los cuadros de la izquierda de la Figura 5.13 grafican los transitorios en las salidas producidos por una perturbación en y_2 . Allí se verifica la limitación del efecto cruzado en la salida y_1 . Las líneas continuas corresponden al caso con MD y las punteadas al lazo cerrado original. Por otro lado, para el caso de una perturbación en y_1 , en la parte derecha de la figura se muestra que el sistema con el método propuesto incorporado opera exactamente igual a cómo lo hace el sistema original cuando no se alcanzan los límites de la interacción (las líneas continuas y punteadas están superpuestas).

En la Figura 5.14 se presenta la respuesta del sistema con compensación por MD en presencia de tanto cambios en la referencia como perturbaciones a la salida de la variable controlada y_2 . Aún en el peor caso, para $t = 2700s$, en que ocurre una perturbación positiva en y_2 , lo que hubiese producido una interacción mayor (ver Figura 5.13), y_1 se mantiene dentro de las cotas fijadas. La mitad inferior de la figura refleja la evolución de las trayectorias de salida en el plano (y_1, y_2) para el lazo cerrado nominal (línea punteada) y para el sistema con acondicionamiento por MD (línea continua). A diferencia de este último caso, el lazo cerrado nominal (sin MD) excede largamente los límites de la interacciones.

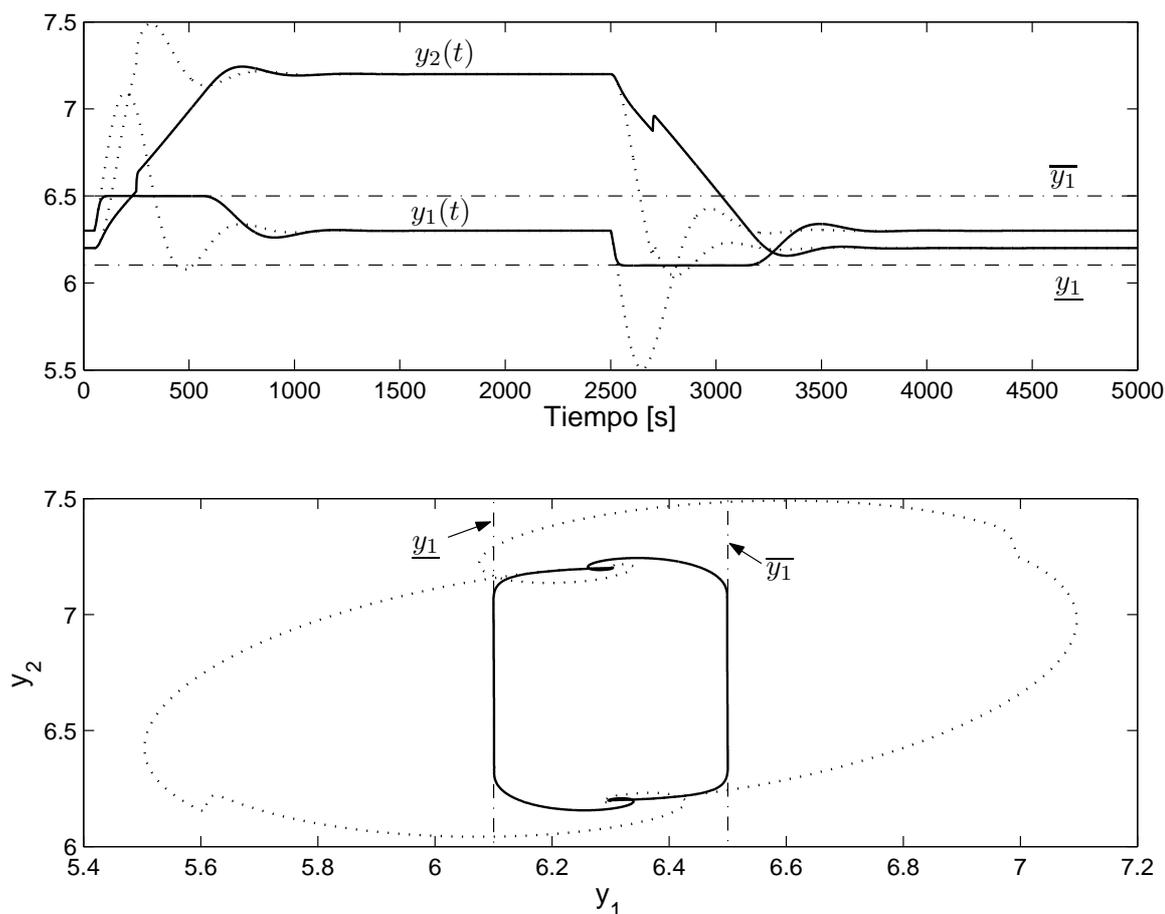


Figura 5.14: Salidas del proceso y para escalones en r_2 y perturbaciones d_2 (mitad superior), y las correspondientes trayectorias de las salidas (mitad inferior). Línea punteada: respuesta lazo cerrado original. Línea continua: resultados obtenidos con el método propuesto.

Naturalmente, la mejora lograda por el método con respecto al acoplamiento cruzado tiene un potencial costo en otros índices de performance, lo cual depende de las cotas impuestas a las interacciones. La Figura 5.15 analiza este costo para el ejemplo dado.

El gráfico superior de la Figura 5.15 compara el tiempo de establecimiento (3%) obtenido con el lazo cerrado nominal contra el que resulta con el método propuesto para diferentes límites en las interacciones. Para esta comparación, se consideró el caso de seguimiento de la Figura 5.11. En particular, se eligió el seguimiento de r_2 (peor caso). Obviamente, el lazo cerrado nominal presenta siempre el mismo tiempo de establecimiento T_{s0} , que se indica con una línea horizontal punteada. Para límites en la interacción no demasiado exigentes (δ_1^+ mayor a 0,3), hay un rango en el cual el sistema con acondicionamiento por MD obtiene menores tiempos de establecimiento que el sistema nominal. Esto no debe esperarse en general, ya que no es éste el objetivo del método. A medida que el límite superior de la interacción δ_1^+ decrece (por debajo de 0,3), el tiempo de establecimiento crece. La línea punteada vertical indica el caso considerado en las figuras previas, como puede verificarse en la Figura 5.11.

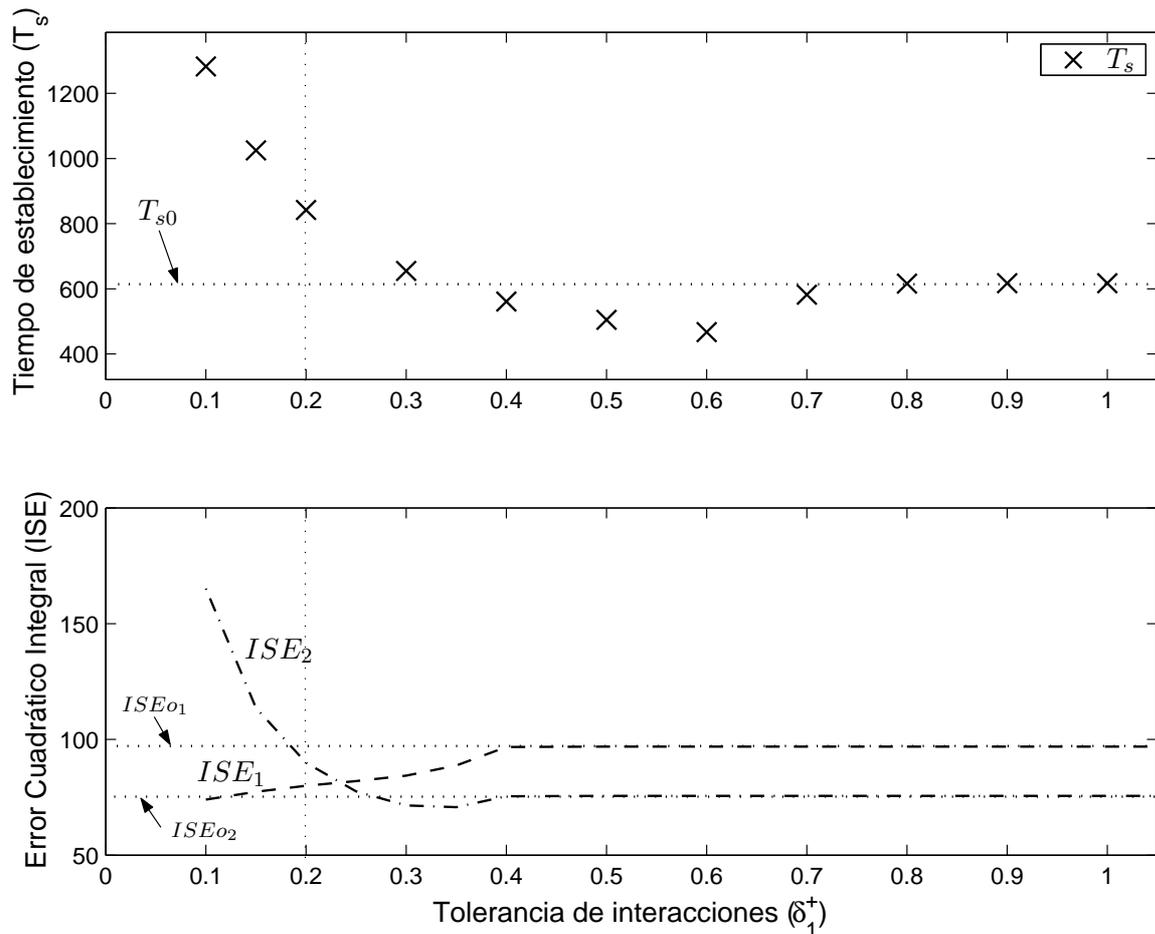


Figura 5.15: Gráfico superior: tiempo de establecimiento para la variable y_2 de la Figura 5.11. Gráfico inferior: Error Cuadrático Integral correspondiente a la parte izquierda de la Figura 5.13.

El Error Cuadrático Integral (ISE , Integral Square Error), usualmente utilizado como un índice de performance para la regulación, se considera en la parte inferior de la Figura 5.15. Allí, el ISE se calcula para diferentes límites en la interacción correspondiente al caso perturbado de la Figura 5.13 (recuadros de la izquierda). Nuevamente, los errores correspondientes al lazo cerrado original ISE_{o1} e ISE_{o2} se grafican con líneas horizontales punteadas, y el caso considerado en la columna izquierda de la Figura 5.13 se indica con una línea punteada vertical. Si bien hay una región en la cual tanto ISE_1 e ISE_2 son menores que los errores del caso nominal, para δ_1^+ inferiores a 0,25 se observa cómo ISE_1 mejora mientras que ISE_2 se deteriora. Parece lógico porque ISE_1 corresponde a la salida limitada y_1 , pero ISE_2 se obtiene del canal perturbado, cuya referencia está siendo condicionada.

Es importante remarcar que el objetivo del método no es reducir ni el tiempo de establecimiento ni el ISE . De todas formas, por medio de un análisis como el de la Figura 5.15, el diseñador del sistema de control puede conocer a priori cómo el método afecta otros índices de performance antes de decidir su implementación.

5.4.2. Reactor catalítico

Este ejemplo muestra que el algoritmo propuesto es aplicable a procesos con retardo, siempre que se pueda construir un predictor de Smith o similar. En efecto, para los numerosos procesos con retardo que ya tienen incorporado un predictor, la implementación del método no implica ninguna complejidad adicional.

Los parámetros del sistema MIMO considerado en este ejemplo han sido tomados de una planta piloto diseñada para realizar estudios sobre conversiones catalíticas en la destilación de petróleo liviano (Puleston y Mantz, 1995). La planta consiste básicamente en un reactor tubular adiabático rodeado de calefactores eléctricos independientes. Cada una de estas etapas de calentamiento es monitoreada mediante una termocupla. Un esquema básico del reactor se muestra en la Figura 5.16.

El sistema puede describirse mediante el siguiente modelo lineal:

$$\frac{dx(t)}{dt} = 10^{-4} \begin{bmatrix} -0,51 & 0,21 \\ 0,21 & -0,51 \end{bmatrix} x(t) + 10^{-4} \begin{bmatrix} 0,42 & 0 \\ 0 & 0,42 \end{bmatrix} u(t - 490) \quad (5.53)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0,56 & 0,22 \\ 0,22 & 0,56 \end{bmatrix} x(t), \quad (5.54)$$

donde las salidas $y(t) = [y_1 \ y_2]^T$ son las temperaturas interiores del reactor y los estados $x(t) = [x_1 \ x_2]^T$ son las temperaturas de las carcasas de los hornos. La acción de control $u(t) = [u_1 \ u_2]^T$ tiene un retardo de 490s.

El RGA de esta planta es:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0,6452 & 0,4468 \\ 0,4468 & 0,6452 \end{bmatrix}, \quad (5.55)$$

y por lo tanto no se necesita invertir las salidas en el sistema de control. Una vez más, agregamos al sistema dos filtros idénticos de primer orden $f_1(s)$ y $f_2(s)$, en este caso con autovalores $\lambda_{f_1} = \lambda_{f_2} = -50$. El lazo cerrado considerado ya tiene incorporado un predictor y dos controladores descentralizados PI:

$$C_i(s) = 142,3 \cdot \left(1 + \frac{1}{17000s} \right) \quad i = 1, 2. \quad (5.56)$$

El sistema fue excitado con dos escalones, en la referencia r_1 en $t = 100s$ y en la referencia r_2 para $t = 5000s$, obteniéndose las respuestas que se grafican en línea punteada en la Figura 5.17. Las señales de referencia r_1 y r_2 se muestran en línea punteada delgada. De las curvas resultantes se pueden apreciar el acoplamiento cruzado y el retardo del sistema.

El método propuesto es entonces implementado con el objetivo de delimitar las interacciones a $0,1^\circ C$. Notar que las funciones de transferencia no-diagonales del reactor tienen el mismo grado relativo que las correspondientes al tanque cuádruple invertido. Entonces, superficies de deslizamiento de la forma de (5.51)–(5.52) también funcionarían para este sistema. Ahora elegimos ganancias constantes $k_2^1 = 0,1$ y $k_2^2 = 0,1$ para una constante de tiempo del lazo de acondicionamiento de aproximadamente 0,1s. Nuevamente, tomamos $w_1^- = w_2^- = -1$ y $w_1^+ = w_2^+ = 1$.

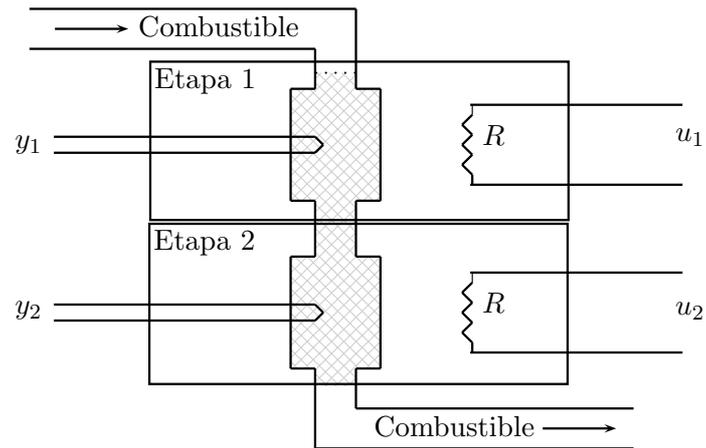


Figura 5.16: Diagrama esquemático del reactor catalítico

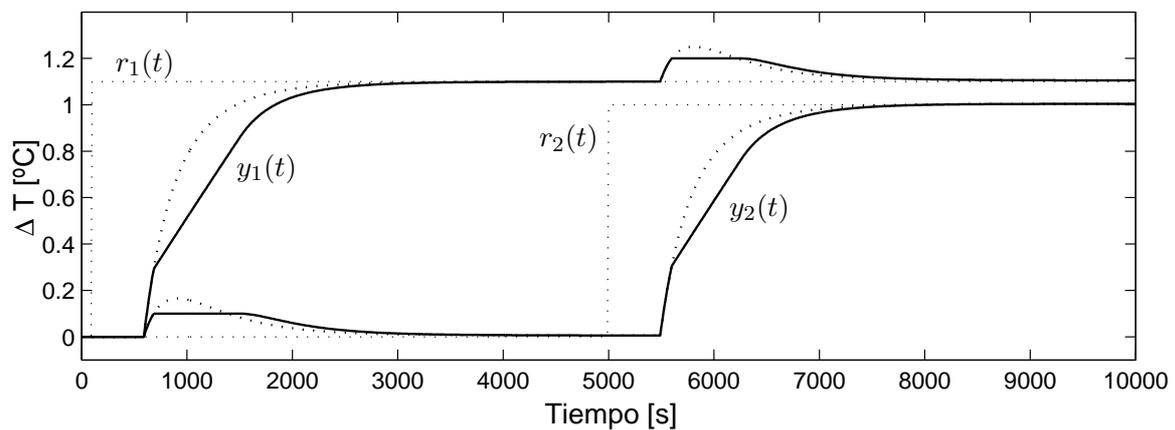


Figura 5.17: Salidas y del proceso con retardo con el método propuesto (línea continua) y sin el método (línea punteada)

Las líneas continuas de la Figura 5.17 describen los resultados obtenidos al agregar al lazo cerrado nominal el acondicionamiento por MD. Las mismas corroboran que, aún en presencia de retardos, las interacciones quedan acotadas por los límites establecidos debido al establecimiento del MD (durante la parte plana de las respuestas).

5.5. Resumen del capítulo

En este capítulo se estudiaron conceptos relacionados al control descentralizado de sistemas multivariables. Se describió este tipo de arquitectura de control, se analizó al RGA como medida para las interacciones entre los lazos, y se presentó el concepto de Controlabilidad Integral Descentralizada (DIC). A su vez, se evaluaron los efectos que las interacciones cruzadas pueden causar en estructuras de control multi-lazo.

Posteriormente, y a partir de los conceptos estudiados, se desarrolló un método para limitar las interacciones cruzadas en el control descentralizado de sistemas MIMO. El método muestra ser efectivo también para limitar los efectos cruzados de las perturbaciones a la salida de la planta.

Dado que el algoritmo propuesto puede ser agregado fácilmente a las numerosas estructuras de control descentralizadas ya existentes, resulta una herramienta útil para la operación segura de sistemas MIMO bajo control descentralizado, asegurando que las variables controladas queden confinadas a un rango determinado de valores.

El método de compensación fue evaluado a través de simulaciones sobre un ejemplo realista de relativa complejidad como el *tanque cuádruple*, en el que mostró ser efectivo para reducir el acoplamiento del sistema. Se analizaron para este ejemplo los costos asociados a la implementación del método a través de su influencia en índices de performance típicos. Finalmente, se verificó el funcionamiento del método en un proceso con retardo.

CAPÍTULO 6

SISTEMAS DE NO-MÍNIMA FASE: DESACOPLAMIENTO PARCIAL CON COTAS EN EL ACOPLAMIENTO REMANENTE

El desacoplamiento triangular de los sistemas multivariantes ha sido considerado en numerosas contribuciones como una alternativa para relajar las limitaciones impuestas por el desacoplamiento diagonal en procesos de no-mínima fase. Esta estrategia permite desacoplar una determinada variable sin imponer en su respuesta características de fase no-mínima. A su vez, por tratarse de una arquitectura centralizada, la performance de lazo cerrado alcanzable es claramente superior a la que se obtendría con un controlador descentralizado, particularmente para los sistemas de NMF.

Sin embargo, cuando los ceros del semiplano derecho están alineados con la variable de interés (variable desacoplada), eliminar el efecto de estos ceros en dicha variable da lugar a interacciones de gran amplitud en las restantes variables del sistema. En este capítulo se estudia esta característica de los sistemas de NMF parcialmente desacoplados, y se presenta un método para limitar las interacciones remanentes sin afectar la variable principal con respuestas inversas. Esta metodología ha sido publicada en (Garelli *et al.*, 2006b,d).

6.1. Introducción

Como hemos visto, una de las propiedades inherentes a los sistemas multivariantes son las interacciones cruzadas entre sus diferentes entradas y salidas. En el capítulo anterior, se desarrolló un algoritmo para limitar las interacciones en sistemas con arquitecturas de control descentralizado. Sin embargo, a pesar de su clara supremacía en la industria de procesos, el control descentralizado no siempre conduce a soluciones adecuadas. En particular, los sistemas de no-mínima fase requieren en muchas aplicaciones de una estructura de control centralizada para cumplir con las especificaciones de performance (véanse las conclusiones de la sección 5.2.5).

Idealmente, con el fin de eliminar las interacciones cruzadas en los sistemas de NMF, uno podría pensar en diseñar un controlador centralizado para obtener el desacoplamiento dinámico completo del sistema, es decir, que la matriz de transferencia a lazo cerrado sea una matriz diagonal. En el Capítulo 2 (sección 2.3.2) se presentó una técnica para sintetizar inversas aproximadas estables de sistemas multivariados de NMF. Ahora bien, no obstante sus intuitivas ventajas, hemos visto que el desacoplamiento completo tiene generalmente costos de performance asociados. Cuando se trata de plantas de no-mínima fase, el desacoplamiento diagonal introduce ceros adicionales en el semiplano derecho (Desoer y Gündes, 1986) y agudiza las limitaciones fundamentales de diseño de los sistemas multivariados de control (Seron *et al.*, 1997; Brinsmead y Goodwin, 2001).

Por esta razón, el llamado desacoplamiento parcial o triangular ha sido considerado como una forma alternativa de reducir las interacciones, ya que disminuye los costos asociados al desacoplamiento diagonal (Gómez y Goodwin, 1997; Koumboulis, 1996; Koumboulis y Skarpetis, 2000). Un sistema parcialmente desacoplado tiene al menos una variable completamente desacoplada de las demás, y su matriz de transferencia resultante a lazo cerrado resulta ser en general triangular inferior o superior. Si bien cualquier sistema que puede ser desacoplado en forma diagonal puede desacoplarse triangularmente, la afirmación recíproca no es cierta (Morse y Wonham, 1970; Wang, 1992). O sea, el desacoplamiento triangular es menos estricto para resolver que el diagonal, y por lo tanto, es aplicable en una mayor cantidad de casos. A su vez, los elementos no diagonales de la matriz de transferencia a lazo cerrado característicos del desacoplamiento triangular contribuyen a relajar las cotas impuestas en las funciones de sensibilidad del lazo por los ceros del SPD (Seron *et al.*, 1997). De especial interés es también la propiedad del desacoplamiento parcial de permitir trasladar los efectos de los ceros de NMF a determinadas variables del proceso, dependiendo de la dirección asociada con dichos ceros (Skogestad y Postlethwaite, 2005). Como contrapartida, para aprovechar estas ventajas del desacoplamiento triangular debe tolerarse en el lazo cerrado la presencia de interacciones con una determinada estructura. Como veremos más adelante, la magnitud de estas interacciones depende fuertemente de la dirección de los ceros en el SPD.

Con el objetivo de poder evaluar en el diseño la relación de compromiso entre las ventajas del desacoplamiento parcial y la tolerancia a las interacciones, Weller y Goodwin (1996) presentaron un método en el que un único parámetro escalar permite interpolar entre controladores que obtienen desacoplamiento diagonal y triangular. Este método ha mostrado ser efectivo y permite sintonizar el controlador en forma sencilla. Sin embargo, en sistemas de NMF, a medida que se disminuye la tolerancia a las interacciones el diseño resultante da lugar a respuestas inversas en la variable desacoplada, en la cual usualmente se requiere un mejor control por ser la de mayor interés en el proceso. Este efecto puede ser cuantificado mediante las cotas obtenidas por Johansson (2002), quien demostró que los ceros en el SPD cercanos al origen y las interacciones de poca amplitud producen pronunciadas respuestas inversas a señales de tipo escalón.

En este capítulo se presenta una metodología para acotar las interacciones remanentes en un sistema parcialmente desacoplado, evitando en la medida de lo posible las respuestas inversas en la variable de mayor interés (variable desacoplada). Para ello, se explora en primer lugar el diseño de un controlador centralizado para sistemas de NMF que logre el desacoplamiento de una variable de interés. A fin de obtener controladores estables y propios que lleven a matrices de transferencia de lazo cerrado triangulares, se combinan consideraciones relativas a la dirección de salida de los ceros en el SPD (Morari y Zafriou, 1989; Skogestad y Postlethwaite, 2005) y al grado relativo de la matriz de transferencia de la planta (Goodwin

et al., 2001). Luego, se agrega un lazo auxiliar al sistema a lazo cerrado con el objetivo de limitar las interacciones remanentes sin transferir dinámica de NMF a la variable desacoplada. Para esto último se modifica la señal de referencia de la variable de interés mediante una señal discontinua. Este acondicionamiento se basa en las ideas presentadas en el Capítulo 5, en el que se combinaron técnicas de acondicionamiento de la referencia con ideas de los regímenes deslizantes para limitar las interacciones cruzadas en sistemas de control descentralizados. Si bien la propuesta del Capítulo 5 mejora notoriamente el desempeño de estructuras de control multivariadas pre-existentes, hereda por otro lado las limitaciones inherentes al control descentralizado. En particular, se mostró para el tanque cuádruple que si se intentaran eliminar las interacciones en al menos una de las variables controladas se provocaría un serio deterioro en la performance del lazo cerrado. El uso de una estrategia de control centralizada, además de lograr un mayor grado de desacoplamiento, nos permitirá obtener una performance de lazo cerrado altamente superior a la obtenida en el capítulo anterior. Estas ventajas se verán ejemplificadas también en el tanque cuádruple, para el cual el desempeño obtenido con la metodología aquí presentada se comparará a su vez con los resultados obtenidos al aplicar el método propuesto por Weller y Goodwin (1996).

6.2. Desacoplamiento parcial y dirección de los ceros en el SPD

En esta sección veremos cuál es el provecho que se puede sacar de no forzar al lazo cerrado a estar desacoplado completamente. Los resultados que siguen se basan en la siguiente suposición:

Suposición 6.1. (a) Todos los ceros z_0 en el SPD de $P(s)$ tienen multiplicidad geométrica unitaria. O sea, el rango de $P(z_0)$ es $(n - 1)$, (b) No hay polos en $s = z_0$.

6.2.1. Restricción algebraica de interpolación

En primer lugar se analizan a modo de ejemplo los efectos del desacoplamiento triangular en la planta (2.91) y (2.109) de los Ejemplos 2.6 y 2.7.

Ejemplo 6.1 Sea nuevamente el sistema de NMF

$$P(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.1)$$

Supongamos que se busca un desacoplamiento parcial a lazo cerrado, en lugar de uno diagonal como en los ejemplos del Capítulo 2. Tomemos sin pérdida de generalidad el caso en que la sensibilidad complementaria deseada es una matriz de transferencia triangular superior:

$$T(s) = P(s)Q(s) = \begin{bmatrix} t_{11}(s) & t_{12}(s) \\ 0 & t_{22}(s) \end{bmatrix}. \quad (6.2)$$

Para ello, el controlador IMC deberá tener la siguiente forma

$$Q(s) = P^{-1}(s) \begin{bmatrix} t_{11}(s) & t_{12}(s) \\ 0 & t_{22}(s) \end{bmatrix}, \quad (6.3)$$

donde la inversa de la planta está dada por (2.111), es decir

$$P^{-1}(s) = \frac{(s+1)(s+2)}{s-1} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & s+1 \end{bmatrix}. \quad (6.4)$$

Esto es,

$$Q(s) = \frac{(s+1)(s+2)}{s-1} \begin{bmatrix} t_{11}(s) & t_{12}(s) - 2t_{22}(s) \\ -t_{11}(s) & -t_{12}(s) + (s+1)t_{22}(s) \end{bmatrix}. \quad (6.5)$$

O sea, para que $Q(s)$ sea estable (y consecuentemente el sistema a lazo cerrado sea internamente estable) se deberá cumplir

$$t_{11}(s)|_{s=1} = 0, \quad (6.6)$$

$$t_{12}(s) - 2t_{22}(s)|_{s=1} = 0. \quad (6.7)$$

Por lo tanto, si bien el cero del SPD aparece en el primer canal ($t_{11}(s)$), al permitirse cierto grado de acoplamiento (en una sola dirección) se evita la presencia del cero en $t_{22}(s)$ que imponía el diseño por desacoplamiento diagonal evaluado en el Ejemplo 2.7. Lo que debe garantizarse para la estabilidad interna del lazo cerrado es que $t_{22}(1) = t_{12}(1)/2$.

Como es evidente, si se hubiese tomado una sensibilidad complementaria triangular inferior el cero de NMF habría aparecido en $t_{22}(s)$ pero no necesariamente en $t_{11}(s)$.

El resultado obtenido en el ejemplo anterior es un caso particular del siguiente teorema, que proporciona una manera directa de verificar cuándo existe un controlador $Q(s)$ estable para una determinada sensibilidad complementaria (Morari y Zafriou, 1989).

Teorema 6.1. *Existe un controlador $Q(s)$ estable tal que la sensibilidad complementaria es igual a una matriz de transferencia $T(s)$ deseada si y sólo si $T(s)$ satisface*

$$h^T T(z_0) = 0 \in \mathbb{R}^m, \quad (6.8)$$

para todos los ceros z_0 en el SPD de la planta $P(s)$, donde h^T es la dirección de salida del cero z_0 . La condición (6.8) es conocida como restricción algebraica de interpolación.

Demostración:

\Rightarrow Asumiendo que existe un $Q(s)$ estable tal que $T(s) = P(s)Q(s)$, entonces se tiene que $h^T T(z_0) = h^T P(z_0)Q(z_0) = 0 \in \mathbb{R}^m$
 \Leftarrow Sea la siguiente expansión en fracciones parciales de $P^{-1}(s)$

$$P^{-1}(s) = \frac{1}{s - z_0} R_0 + P_z(s), \quad (6.9)$$

donde R_0 es la matriz de residuos y $P_z(s)$ es un término restante sin polos en $s = z_0$. Post-multiplicando ambos miembros de la ecuación (6.9) por $P(s)$

$$I = \frac{1}{s - z_0} R_0 P(s) + P_z(s) P(s). \quad (6.10)$$

Como el miembro izquierdo de (6.10) es la matriz identidad, el miembro derecho no podrá tener polos en $s = z_0$. Notar que $P_z(s)P(s)$ no tiene polos en $s = z_0$, por lo que deberá verificarse

$$R_0 P(z_0) = 0 \in \mathbb{R}^m. \quad (6.11)$$

Debido a que z_0 tiene multiplicidad geométrica unitaria, $P(z_0)$ tiene rango $(n - 1)$ y R_0 tiene rango igual a 1. Luego, de acuerdo a la definición de los ceros multivariantes y sus direcciones de salida, las filas de R_0 serán múltiplos de la dirección de salida h^T del cero en el SPD z_0 . Por lo tanto, $h^T T(z_0) = 0$ implica que

$$R_0 T(z_0) = 0 \in \mathbb{R}^m. \quad (6.12)$$

Si ahora se post-multiplica ambos miembros de (6.9) por $T(s)$ se obtiene

$$Q(s) = P^{-1}(s)T(s) = \frac{1}{s - z_0} R_0 T(s) + P_z(s)T(s). \quad (6.13)$$

Dado que $P_z(s)T(s)$ no tiene polos en $s = z_0$, por (6.12) se concluye que $Q(s)$ no tiene polos en $s = z_0$. \square

Comentario 6.1 A partir del teorema anterior es inmediato para el Ejemplo 6.1 que

$$h^T T(1) = [1 \quad -2] \begin{bmatrix} t_{11}(1) & t_{12}(1) \\ 0 & t_{22}(1) \end{bmatrix} = [t_{11}(1) \quad t_{12}(1) - 2t_{22}(1)] = 0 \in \mathbb{R}^2, \quad (6.14)$$

lo que coincide con las condiciones (6.6) y (6.7) necesarias y suficientes para que el sistema a lazo cerrado sea internamente estable.

La condición de interpolación (6.8) requiere que cada columna de la matriz de transferencia a lazo cerrado $T(s)$, evaluada en el cero de la planta z_0 , sea ortogonal a h^T . Otra consecuencia de (6.8) es que los ceros del SPD z_0 no tienen efecto sobre las salidas que corresponden a elementos nulos de h^T (un ejemplo de esto último es la planta $P'(s)$ del Ejemplo 2.7).

Ahora bien, para un sistema completamente desacoplado ($T(s)$ diagonal), la restricción algebraica de interpolación (6.8) impone que el grado de z_0 en $T(s)$ sea al menos igual al número de componentes no nulas en h . Esta es otra forma de demostrar que para el caso general en que h tiene más de una componente no nula, el desacoplamiento dinámico completo provoca el esparcimiento del cero del SPD en los canales correspondientes del lazo cerrado. Contrariamente, el desacoplamiento parcial permite llevar el efecto del cero en el SPD a una determinada variable (salida), cuyo control sea de menor importancia. Esto es posible ya que, si bien la restricción de interpolación impone cierta relación entre los elementos de cada columna de $T(s)$, las columnas en sí mismas pueden elegirse libremente.

6.2.2. Moviendo el efecto de los ceros a una salida

El siguiente teorema, que es inmediato a partir de (6.8), revela el efecto direccional de los ceros de NMF en sistemas parcialmente desacoplados.

Teorema 6.2. *Supóngase que $P(s)$ tiene un único cero z_0 en el SPD, y que el elemento k -ésimo de la dirección asociada a z_0 , h_k , es no-nulo. Luego, para obtener un sistema a lazo cerrado internamente estable la sensibilidad complementaria puede elegirse de la siguiente forma:*

$$T(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & 1 & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\beta_1 s}{s + z_0} & \frac{\beta_2 s}{s + z_0} & \dots & \frac{\beta_{k-1} s}{s + z_0} & \frac{-s + z_0}{s + z_0} & \frac{\beta_{k+1} s}{s + z_0} & \dots & \frac{\beta_m s}{s + z_0} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (6.15)$$

donde

$$\beta_j = -\frac{2h_j}{h_k}, \quad \text{para } j \neq k. \quad (6.16)$$

Este resultado cuantifica el efecto de mover completamente el cero z_0 hacia la salida y_k , debido a la dirección asociada h . Como puede observarse, si el cero está naturalmente alineado

con esta salida ($h_k \gg h_j$), su desplazamiento sólo dará lugar a pequeñas interacciones. En cambio, si el cero está predominantemente alineado con algún y_j , $j \neq k$, correr su efecto hacia la salida y_k producirá grandes interacciones ($\beta_j \gg 1$). De cualquier forma, siempre se puede obtener $T(s)$ para lograr el desacoplamiento estático del sistema (eliminar las interacciones en estado estacionario), característica que en (6.15) se obtiene mediante el cero en el origen en los elementos no-diagonales.

Si bien el Teorema 6.2 da una muy buena descripción del efecto direccional de los ceros del SPD en sistemas parcialmente desacoplados, el mismo supone alcanzable el control perfecto y no garantiza por tanto la existencia de un controlador $Q(s)$ propio. Para esto último, además de cumplir con la restricción de interpolación (6.8), la sensibilidad complementaria deberá tener sus funciones de transferencia con el grado relativo adecuado. En (Goodwin *et al.*, 2001) se presenta un método para la síntesis de controladores $Q(s)$ estables y propios, basado en la factorización de plantas de fase no-mínima que permiten las matrices z-interactoras (véase comentario 2.4). Estas últimas tienen la propiedad de describir la estructura de los ceros finitos en el SPD del sistema, de igual forma que los interactores vistos en el Capítulo 2 describen la estructura del grado relativo (ceros en infinito). En cualquier caso, finalmente se debe elegir $T(s)$ (o un factor de ella) para hacer $Q(s) = P^{-1}(s)T(s)$ propio. Notar en particular que si se busca que $Q(s)$ sea bipropio, $T^{-1}(s)$ deberá tener la misma estructura de grado relativo que el interactor izquierdo $\xi_l(s)$ de $P(s)$.

Como consecuencia de las imposiciones en los grados relativos necesarias para obtener $Q(s)$ propios, la magnitud de las interacciones no sólo depende de la dirección del zero en SPD, sino también de su ubicación y de los grados relativos de las funciones de transferencia de $T(s)$. Sin embargo, el efecto direccional del cero de NMF sigue siendo el descrito por el Teorema 6.2. Para ilustrar esto, se presenta el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6.2 *Considérese nuevamente el modelo de planta de la sección 4.5.2 del Capítulo 4:*

$$P(s) = \frac{1}{(s+1)^2} \begin{bmatrix} s+2 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

$P(s)$ es una planta de NMF con un cero de transmisión en $s = z_0 = 4$. La dirección de salida del cero es $h^T = [1 \ 3]$, lo que explica el comportamiento de NMF en ambos canales obtenido en el Capítulo 4 al desacoplar completamente el sistema (véase la Figura 4.19). Teniendo en cuenta los grados relativos en (6.17), la dirección de z_0 y la restricción (6.8), se proponen sensibilidades complementarias con estructura triangular superior e inferior para las cuales existen $Q(s)$ estables y propios:

$$\begin{aligned} T_{lo}(s) &= \begin{bmatrix} \frac{4}{s+4} & 0 \\ \frac{\alpha_1 s}{(s+4)^3} & \frac{16(-s+4)}{(s+4)^3} \end{bmatrix} \\ T_{up}(s) &= \begin{bmatrix} \frac{4(-s+4)}{(s+4)^2} & \frac{\alpha_2 s}{(s+4)^2} \\ 0 & \frac{16}{(s+4)^2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.18)$$

Fácilmente se puede verificar que tanto $T_{up}(s)$ como $T_{lo}(s)$ hacen $Q(s)$ propio. Los parámetros α_1 y α_2 deben determinarse con el fin de satisfacer (6.8). Así,

$$[1 \ 3] T_{lo}(4) = 0 \Rightarrow \alpha_1 = -64/3$$

$$[1 \ 3] T_{up}(4) = 0 \Rightarrow \alpha_2 = -12$$

Notar que las diferencias entre los valores de α_1 y α_2 respecto de los β_1 y β_2 que se hubiesen obtenido a partir de h según el Teorema 6.2 se deben precisamente a los diferentes grados relativos de los elementos no diagonales en $T_{lo}(s)$ y $T_{up}(s)$. Aún así, el efecto direccional de z_0 descrito por el Teorema 6.2 puede ser apreciado en este ejemplo en las simulaciones mostradas en la Figura 6.1. En ella se evidencia que mover completamente el efecto de z_0 a la salida y_1 produce grandes interacciones (gráfico superior de la figura), mientras que un acoplamiento mucho menor se genera al correr el cero hacia y_2 (gráfico inferior). Esto es consistente con el análisis previo, ya que z_0 está alineado principalmente con la salida y_2 .

Partiendo del razonamiento y el ejemplo anterior, uno podría pensar en usar las direcciones de salida de los ceros en el SPD y los grados relativos de las transferencias como una guía para minimizar las interacciones en diseños parcialmente desacoplados. Sin embargo, el desacoplamiento parcial es de utilidad precisamente para controlar procesos en los que una variable en particular debe ser controlada mejor que otras. Por lo tanto, la variable a desacoplar no siempre puede ser elegida arbitrariamente, sino que depende de la naturaleza del proceso. Si debido a la estructura propia de la planta el cero del SPD está alineado principalmente con la variable de interés, el resultado anterior predice que eliminar respuestas de tipo inversa en dicha variable traerá aparejadas interacciones de gran amplitud. En la sección siguiente se presenta un método para acotar estas interacciones sin transferir características de NMF a la respuesta de la variable de interés.

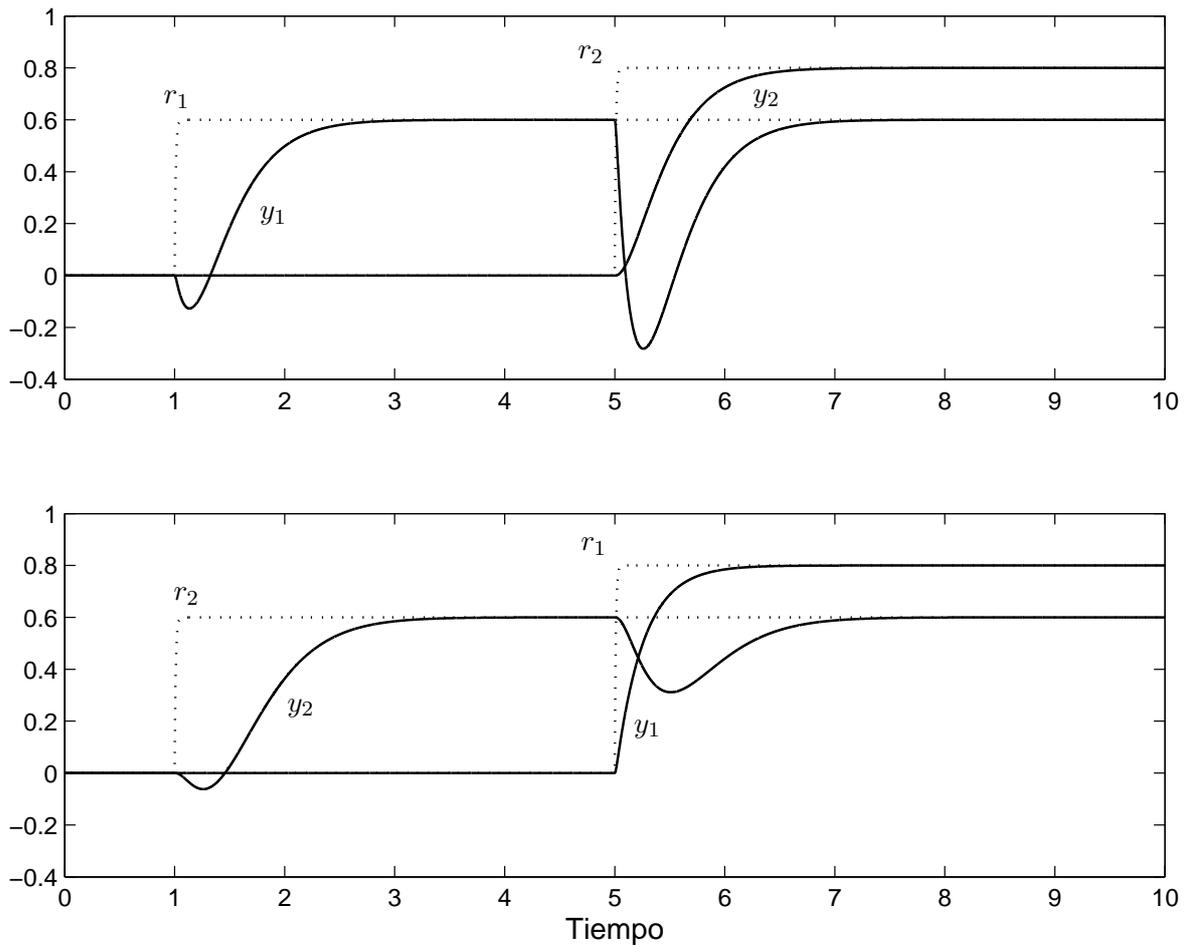


Figura 6.1: Desacoplamiento triangular superior (recuadro de arriba) e inferior (recuadro de abajo) de la planta representada por (6.17)

6.3. Desacoplamiento parcial con interacciones acotadas

A continuación se presenta una metodología para limitar el acoplamiento remanente en sistemas de NMF parcialmente desacoplados. Para mantener la descripción del algoritmo lo más simple posible, la presentación se restringe a sistemas de 2 entradas y 2 salidas. Su extensión al caso de sistemas de $n \times n$ es inmediata.

La Figura 6.2 muestra un sistema triangularmente desacoplado (dentro del recuadro punteado) al que se le agregó el acondicionamiento por MD (lazo exterior). $P(s)$ representa el proceso a controlar, el cual puede ser estable o inestable, y $C(s)$ es un controlador centralizado diseñado para obtener desacoplamiento triangular superior, configuración que se considerará en esta sección sin pérdida de generalidad. Para el caso triangular inferior se deberían invertir los subíndices de las referencias y las cotas de interacción.

La estructura del lazo de compensación para limitar las interacciones remanentes en el sistema parcialmente desacoplado es similar a la detallada en el capítulo anterior, por lo que sólo se describirá brevemente.

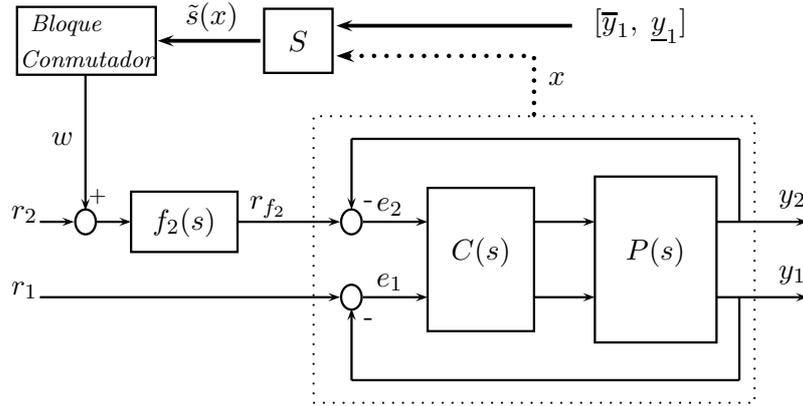


Figura 6.2: Sistema parcialmente desacoplado ($T(s)$ triangular inferior) con acondicionamiento por MD

El bloque S computa las funciones de conmutación $\underline{s}(x)$ y $\overline{s}(x)$ a partir de las cotas inferiores y superiores de la interacción \underline{y}_1 y \overline{y}_1 (nuevamente, \tilde{x} es usado para denotar tanto \underline{x} como \overline{x}). $f_2(s)$ es un filtro lineal de primer orden cuya dinámica es rápida en relación a la del lazo cerrado, de forma tal que la respuesta del sistema no se vea afectada mientras no haya riesgo de superar las cotas prefijadas para la interacción cruzada.

Para conseguir el objetivo propuesto, la siguiente ley de conmutación se implementa en el *bloque conmutador*:

$$\begin{cases} w = w^- & \text{si } \overline{s}(x) < 0 \\ w = w^+ & \text{si } \underline{s}(x) > 0 \\ w = 0 & \text{en cualquier otro caso,} \end{cases} \quad (6.19)$$

donde:

$$\tilde{s}(x) = \tilde{y}_1 - y_1 - \sum_{\alpha=1}^{\rho} k_{\alpha+1} y_1^{(\alpha)} \quad (6.20)$$

siendo ρ el grado relativo de la función de transferencia entre la salida y_1 y la referencia r_{f_2} , $y_1^{(\alpha)}$ la derivada de orden α de y_1 y $k_{\alpha+1}$ ganancias constantes.

La lógica de conmutación (6.19)-(6.20) lleva a que la referencia filtrada r_{f_2} sea transitoriamente acondicionada ante el riesgo de que y_1 exceda los límites establecidos. Esta dosificación de la señal de referencia logra limitar el acoplamiento cruzado sin provocar respuestas de tipo inversa en la variable desacoplada.

Cuando el algoritmo propuesto se aplica a un problema en el que sólo se busca la regulación de la variable controlada y_1 en torno a su set-point, los límites \underline{y}_1 y \overline{y}_1 representan valores constantes útiles para determinar cotas de seguridad en la distancia entre el valor instantáneo de y_1 y su valor deseado r_1 . Sin embargo, en aquellos problemas en que el seguimiento simultáneo de r_1 y r_2 sea un objetivo de control, las cotas al acoplamiento cruzado podrían generarse como $\underline{y}_1 = \hat{y}_1 - \delta_1^-$ e $\overline{y}_1 = \hat{y}_1 + \delta_1^+$, siendo \hat{y}_1 la evolución temporal de y_1 debida a un cambio exclusivamente en r_1 (como si el sistema estuviese diagonalmente desacoplado), y δ_1^\pm tolerancias constantes al acoplamiento cruzado. Nótese que \hat{y}_1 puede ser generado fácilmente

mediante un detector de flancos en r_1 suponiendo conocido el modelo de la planta. A su vez, la incertidumbre en el modelado podría tenerse en cuenta con una selección conservativa de δ_1^\pm . Luego, si ambas referencias cambiaran simultáneamente, el acondicionamiento por MD de r_{f_2} se activaría sólo en el caso en que la respuesta en y_1 estuviese por apartarse de la (artificialmente generada) respuesta desacoplada \tilde{y}_1 más de lo permitido por las tolerancias δ_1^\pm . Esta operación del método propuesto se ilustra en el primer ejemplo de la próxima sección.

La presencia de $y_1^{(\rho)}$ en (6.20) garantiza la condición necesaria para el establecimiento del MD de tener grado relativo unitario respecto a w . Para poder implementar estas funciones de conmutación no se necesita derivar la salida de la planta, pero sí se requiere que determinados estados de la planta sean medidos o estimados, ya que en la práctica los $y_1^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, \dots, \rho$, se obtienen como una combinación lineal de los estados del sistema a lazo cerrado y del error $e_2 = r_{f_2} - y_2$ en el operador representado por el bloque S de la Figura 6.2. La transformación lineal de estados necesaria para este cálculo fue detallada en los capítulos anteriores.

Si bien la necesaria inclusión de $y_1^{(\alpha)}$ hace las funciones de conmutación menos intuitivas, otorga a su vez grados de libertad que sirven para controlar la velocidad de aproximación a los límites de la interacción.

De hecho, haciendo (6.20) igual a cero, la evolución de y_1 durante el MD puede describirse en la forma normal mediante:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = z_3 \\ \dots = \dots \\ \dot{z}_{\rho-1} = z_\rho \\ \dot{z}_\rho = (\tilde{y}_1 - y_1 - \sum_{\alpha=2}^{\rho} k_\alpha z_\alpha) / k_{\rho+1} \\ \dot{\eta} = P_{21}\xi + Q_{21}\eta. \end{array} \right. \quad (6.21)$$

donde $\xi = \text{col}(z_1, z_2, \dots, z_\rho)$ contiene la salida y_1 y sus primeras $(\rho - 1)$ derivadas y $\eta = \text{col}(z_{\rho+1}, \dots, z_n)$ son $(n_{21} - \rho)$ estados linealmente independientes, siendo n_{21} el orden de la transferencia entre r_{f_2} e y_1 . Los ceros de esta función de transferencia son los autovalores de Q_{21} , que determinan la dinámica escondida. Dado que los elementos no diagonales de la matriz de transferencia de un sistema parcialmente desacoplado siempre pueden diseñarse sin ceros en el SPD (como se vio en la sección 6.2), la dinámica escondida durante el MD será estable. La salida y_1 evoluciona de acuerdo a las primeras ρ líneas de (6.21). Así, la dinámica con que y_1 se aproxima a \tilde{y}_1 durante el MD depende sólo de los valores elegidos para k_α , y es independiente de la dinámica impuesta por el controlador centralizado $C(s)$ al lazo principal de control. Esto permite evitar sobrepasos y restringir así las interacciones a las cotas \tilde{y}_1 . El MD finaliza cuando la salida del sistema retorna por sí misma a la región permitida. Esto último sucede gracias a que el diseño del lazo principal de control logra el desacoplamiento estático —véase $T(s)$ en Teorema 6.2—, y por lo tanto no hay interacciones en estado estacionario.

Comentario 6.2 *Nótese que para esta propuesta también valen los comentarios adicionales de la sección 5.3.5 en relación a los costos asociados al desacoplamiento diagonal en sistemas de NMF —comentario ii)—, y a los problemas de chattering o modo del alcance del MD —comentario iii)—.*

6.4. Ejemplos

6.4.1. Ejemplo numérico

Considérese otra vez el Ejemplo 6.2 de la Sección 6.2.2 en que el proceso es descrito por (6.17). La matriz de transferencia de lazo cerrado $T_{up}(s)$ en (6.18) se obtiene mediante el controlador IMC:

$$Q_{up}(s) = \frac{(s+1)^2}{(s+4)^2} \begin{bmatrix} -4 & -12 \\ -8 & -8 \end{bmatrix}. \quad (6.22)$$

Debido a la dirección del cero en el SPD, el desacoplamiento de y_2 implica grandes interacciones en y_1 (véase Figura 6.1). El objetivo es entonces confinar estas interacciones a cotas predefinidas sin degradar considerablemente la respuesta de y_2 . Para ello se agregó al sistema el lazo de corrección propuesto tal como muestra la Figura 6.2. La siguiente superficie de deslizamiento fue diseñada considerando el grado relativo unitario ($\rho = 1$) del elemento no-diagonal de $T_{up}(s)$:

$$\tilde{s}(x) = \tilde{y}_1 - y_1 - k_2 \dot{y}_1 = 0. \quad (6.23)$$

El autovalor de $f_2(s)$ se fijó en $\lambda_f = -100$ y los valores de la señal discontinua en $w^+ = -w^- = 1$.

Para ilustrar la generación de las derivadas de las salidas a partir de los estados del sistema, se considera la siguiente realización mínima de (6.17):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} -2 & 0,5 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -0,5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1,5 \\ 0 & 1 & 0 & 0,5 \end{bmatrix} x. \end{aligned} \quad (6.24)$$

De esta manera, las superficies de modo deslizante (6.23) son en realidad implementadas como:

$$\tilde{s} = \tilde{y}_1 - y_1 - k_2(0,5x_2 - 3x_3 + u_1) = 0, \quad (6.25)$$

En la Figura 6.3 se presentan los resultados de simulación para $k_2 = 1/100$, con la que se obtiene una constante de tiempo de aproximadamente $10ms$ durante el MD. Se consideraron las siguientes cotas en la interacción: $\underline{y}_1 = -0,3$ (línea punteada), $\underline{y}_1 = -0,1$ (línea a puntos y rayas), $\underline{y}_1 = 0,1$ (línea discontinua) y $\underline{y}_1 = 0,3$ (línea continua). La correspondiente evolución temporal de las demás señales de interés en el lazo se muestra en la Figura 6.4. Como puede observarse, el método acota la interacción sin generar respuestas inversas en la variable principal (y_2). Por otro lado, el sistema de control original no es afectado en nada si no se alcanzan los valores límites de las interacciones (en el ejemplo, para $\underline{y}_1 \leq -0,3$).

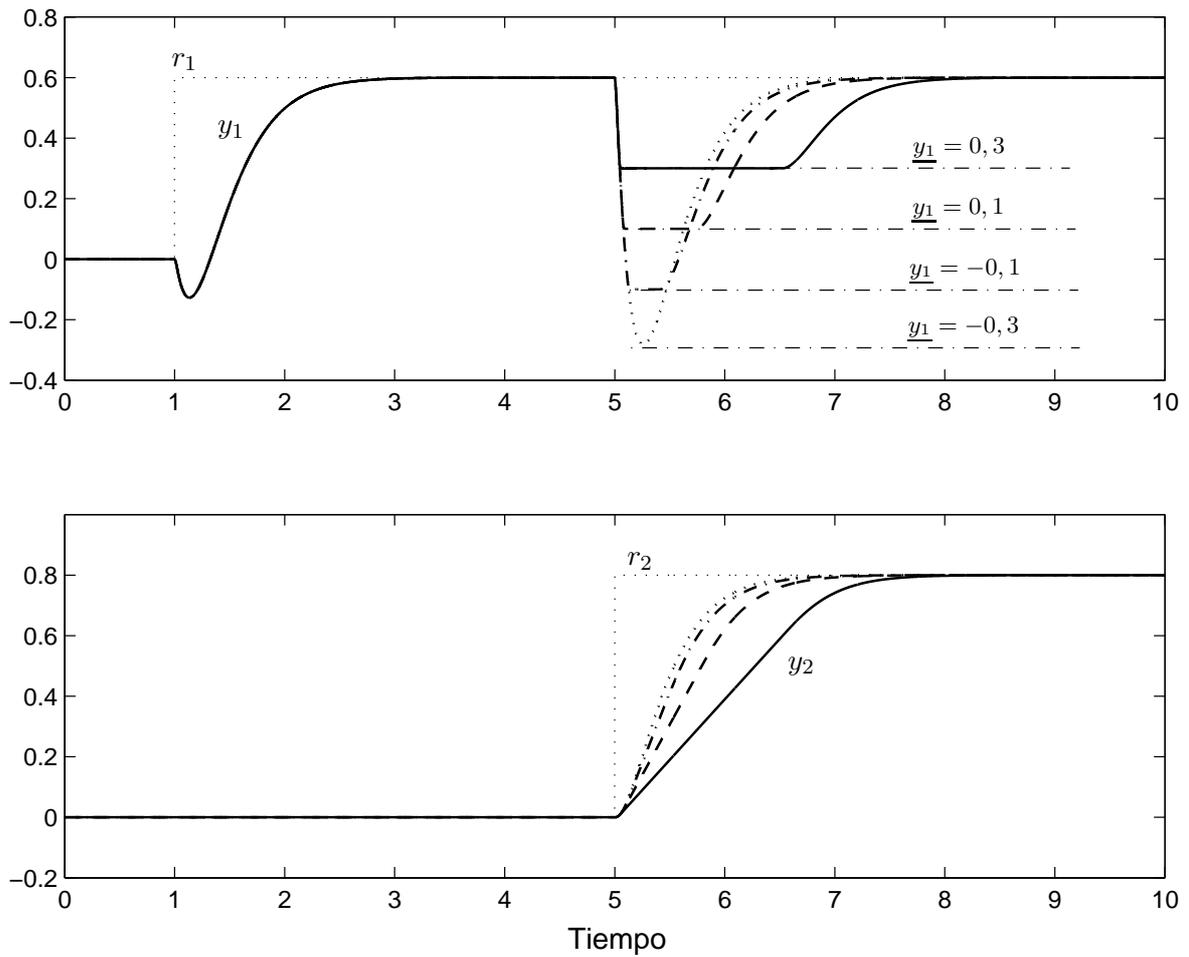


Figura 6.3: Señales de salida con método por MD para diferentes cotas en la interacción.

La Figura 6.5 ilustra cómo a través del diseño de la superficie de deslizamiento puede controlarse la velocidad de aproximación de la interacción a su límite. Se muestran las respuestas del sistema para la cota $\underline{y}_1 = 0,1$, correspondiente al trazo a rayas de la Figura 6.3, pero con valores $k_2 = 1/10$ (línea punteada), $k_2 = 1/20$ (línea discontinua) y el caso anterior en que $k_2 = 1/100$ (línea continua).

Por último, la operación del método cuando ambas referencias cambian en forma simultánea (en $t = 1$) se muestra en la Figura 6.6. En este caso, las cotas en el acoplamiento remanente \underline{y}_1 y \overline{y}_1 se especifican con respecto a la respuesta ideal desacoplada \hat{y}_1 en lugar de ser valores constantes. Las simulaciones se hicieron para $\delta_1^\pm = 0,3$, $\delta_1^\pm = 0,5$ y δ_1^\pm suficientemente grande como para obtener la respuesta a lazo cerrado original (el MD no se establece en este último caso).

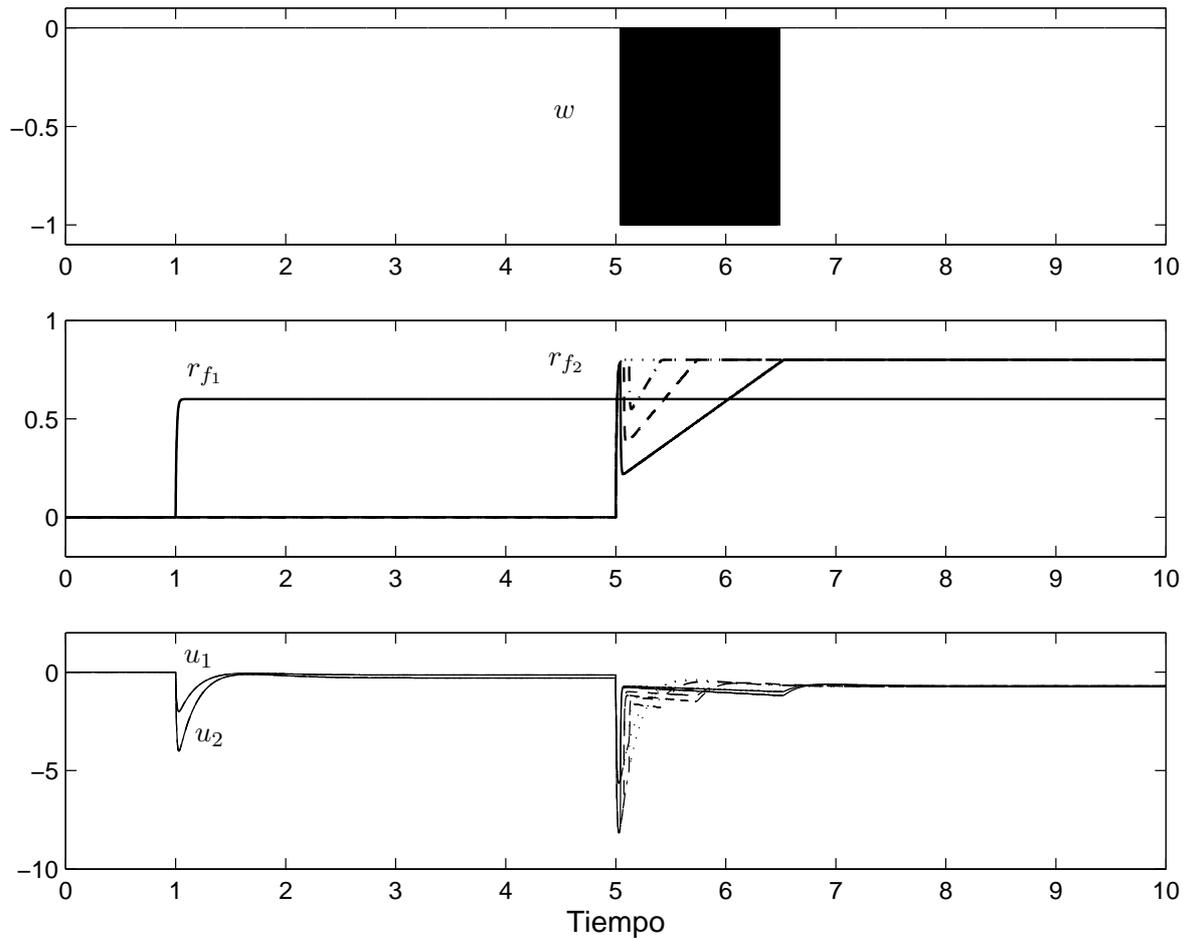


Figura 6.4: Señales discontinuas w (solapadas), referencias filtradas r_f y salidas del controlador u , correspondientes a la Figura 6.3.

6.4.2. Tanque cuádruple

Retomemos ahora el caso estudiado en el Capítulo 5 del tanque cuádruple con cero ajustable propuesto originalmente en (Johansson, 2000). El diagrama esquemático de esta planta se repite en la Figura 6.7.

Para la matriz de transferencia $P(s)$ del modelo linealizado del sistema (5.42), la dirección $h^T = [h_{0_1} \ h_{0_2}]$ del cero en $s = z_0 > 0$ está dada por¹

$$[h_{0_1} \ h_{0_2}] \begin{bmatrix} \frac{\gamma_1 T_1 k_1 k_c}{A_1(1 + T_1 z_0)} & \frac{(1 - \gamma_2) T_1 k_1 k_c}{A_1(1 + T_1 z_0)(1 + T_3 z_0)} \\ \frac{(1 - \gamma_1) T_2 k_2 k_c}{A_2(1 + T_2 z_0)(1 + T_4 z_0)} & \frac{\gamma_2 T_2 k_2 k_c}{A_2(1 + T_2 z_0)} \end{bmatrix} = 0 \in \mathbb{R}^2. \quad (6.26)$$

¹En este ejemplo las componentes de la dirección de salida del cero z_0 se denotan h_{0_i} a fin de evitar confusiones con los niveles en los tanques h_i .

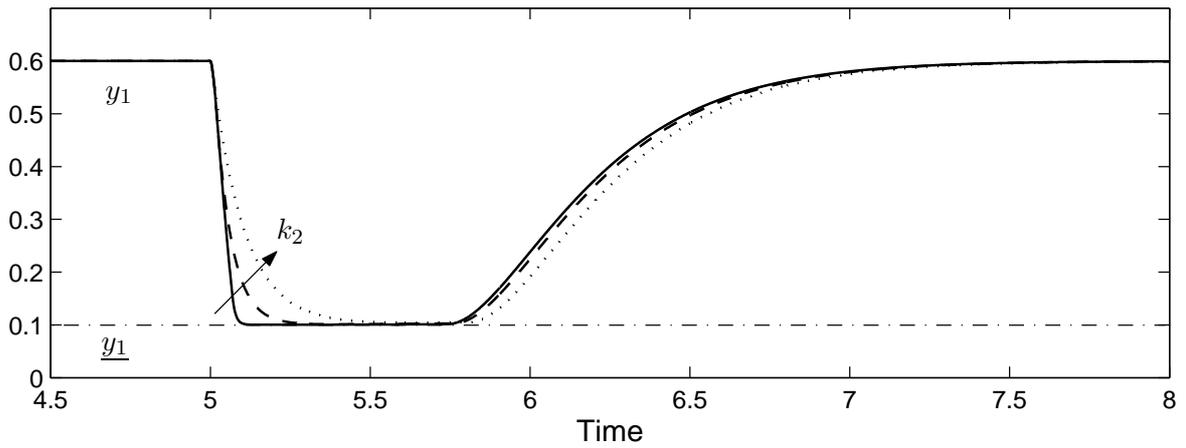


Figura 6.5: Diferentes velocidades de aproximación a los límites de interacción en y_1 .

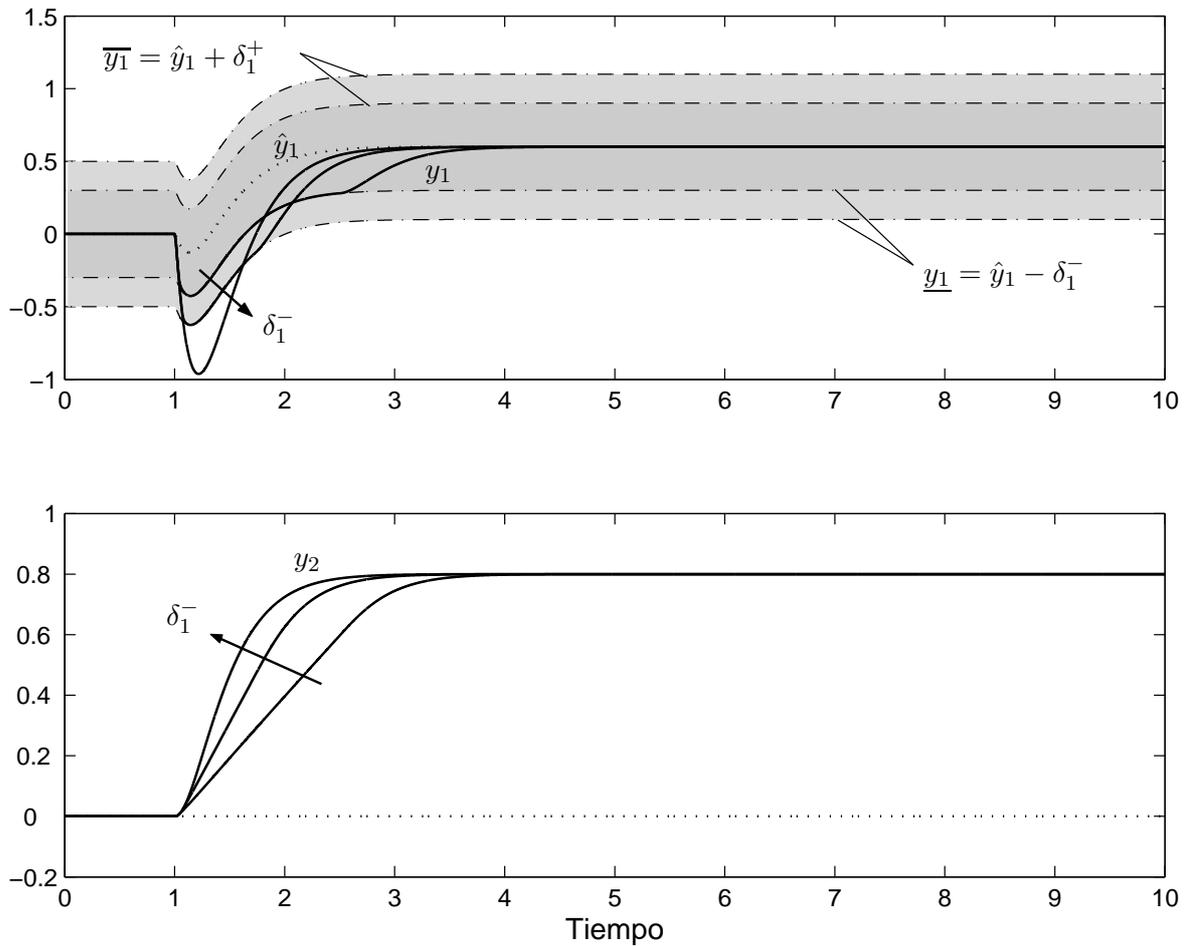


Figura 6.6: Limitación del acoplamiento en y_1 durante el seguimiento de r_1 con diferentes tolerancias al acoplamiento δ_1^\pm .

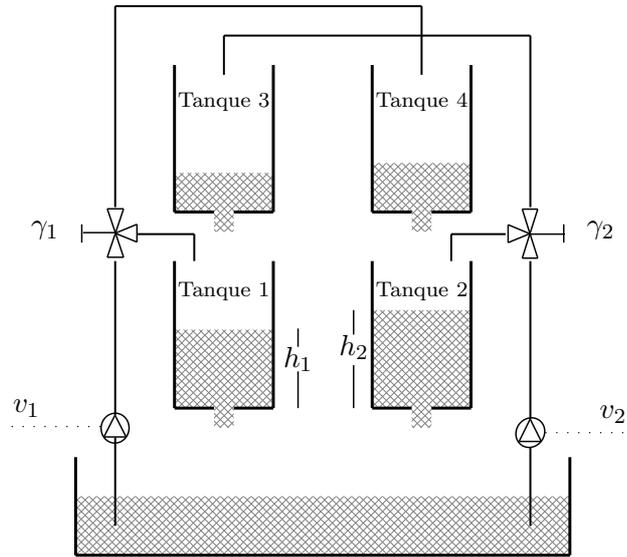


Figura 6.7: Diagrama esquemático del tanque cuádruple

Obsérvese que de estas ecuaciones se desprende que $h_{0_1} \neq 0$ y $h_{0_2} \neq 0$, por lo que el cero nunca estará asociado a una única entrada. Precisamente, de la primera ecuación de (6.26) se tiene que

$$\frac{h_{0_1}}{h_{0_2}} = -\frac{1 - \gamma_1}{\gamma_1} \cdot \frac{T_2 k_2 A_1 (1 + T_1 z_0)}{T_1 k_1 A_2 (1 + T_2 z_0)(1 + T_4 z_0)}. \quad (6.27)$$

Luego, cuando la posición de la válvula 1 es tal que γ_1 es cercana a cero, el cero está alineado con la primera salida y_1 . Si en cambio γ_1 es cercano a uno, entonces el cero está asociado principalmente con la segunda salida y_2 . Por lo tanto, la posición de las válvulas divisoras de caudal γ_1 y γ_2 también influyen, para una dada posición del cero de NMF, respecto a la alineación de este cero con una u otra variable controlada.

Para el punto de operación $P+$, cuyos parámetros se presentaron en la Tabla 5.1, la matriz de transferencia (5.42) resulta

$$P_+(s) = \begin{bmatrix} \frac{1,5}{1 + 63s} & \frac{2,5}{(1 + 39s)(1 + 63s)} \\ \frac{2,5}{(1 + 56s)(1 + 91s)} & \frac{1,6}{1 + 91s} \end{bmatrix}, \quad (6.28)$$

que tiene un cero de transmisión en $s = z_0 = 0,013$. La dirección de salida asociada a este cero es $h^T = [h_{0_1} \ h_{0_2}] = [0,626 \ -0,779]$.

Se supone ahora que el nivel en el tanque inferior izquierdo h_1 es la variable más importante, y que por tanto requiere un control más exacto. Además, se pretende que las interacciones sobre la variable secundaria h_2 no superen la magnitud de los cambios de set-point en h_1 .

Entonces, se busca un controlador IMC propio $Q(s)$ que obtenga una sensibilidad complementaria $T(s)$ triangular inferior y que satisfaga la restricción de interpolación (6.8). Para cumplir con el primero de los objetivos se escoge

$$T_{lo}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}s + 1} & 0 \\ \frac{\alpha s}{(a_{21}s + 1)^2} & \frac{(-1/z_0)(s - z_0)}{(a_{22}s + 1)^2} \end{bmatrix}. \quad (6.29)$$

De modo de satisfacer (6.8) α deberá ser:

$$\alpha = \frac{-h_{01}}{a_{11}z_0 + 1} \frac{(a_{21}z_0 + 1)^2}{h_{02}z_0}. \quad (6.30)$$

Por otro lado, se exige que la variable principal del sistema a lazo cerrado (h_1) presente un tiempo de establecimiento no mayor a 200seg , es decir, aproximadamente 5 veces más rápido que lo obtenido en el capítulo anterior con una estructura de control descentralizada.

De acuerdo a la dinámica deseada y a la importancia de cada variable, se tomó en primer lugar $a_{11} = 20$, $a_{21} = 20$ y $a_{22} = 50$. Con el diseño resultante se corrieron simulaciones en las que se excitó al sistema con señales de tipo escalón para r_1 en $t = 50s$ y para r_2 en $t = 500s$. El gráfico superior de la Figura 6.8 muestra en líneas punteadas las respuestas del lazo cerrado². Si bien la variable de mayor interés h_1 está desacoplada y no presenta respuestas de tipo inversa, la amplitud de la interacción sobre el nivel h_2 ante el cambio en r_1 supera claramente el límite especificado. Una manera trivial de reducir esta interacción sería hacer más lenta la transferencia cruzada del lazo cerrado. Esto se llevó a cabo eligiendo $a_{21} = 50$, y los resultados dan lugar a las curvas continuas en el centro de la Figura 6.8. Además de que el transitorio en y_2^δ se hace más largo, crece también considerablemente el error integral debido a la interacción. Esto queda en evidencia en los dos gráficos inferiores de la figura, donde se muestra la evolución del Error Absoluto Integral (IAE, Integral Absolute Error) de y_1^δ (IAE_1) e y_2^δ (IAE_2) para el escalón en r_1 . Notar que la evolución de IAE_1 es idéntica con $a_{21} = 20$ y con $a_{21} = 50$, por lo que las curvas correspondientes a ambos casos están superpuestas.

En segunda instancia, se consideró el método propuesto por Weller y Goodwin (1996) para mejorar la respuesta del sistema parcialmente desacoplado con restricciones en las interacciones (a la salida). Se toma de aquí en más $a_{21} = 20$. Las líneas continuas de la Figura 6.9 revelan que la interpolación de los diseños por desacoplamiento diagonal y triangular conducen a una significativa mejora en la respuesta transitoria de y_2^δ debida al acoplamiento cruzado (las respuestas del diseño anterior con $a_{21} = 20$ se repiten en línea punteada para permitir la comparación). Sin embargo, en la salida principal y_1^δ se aprecia una respuesta más lenta y de tipo inversa. Ambos fenómenos se verifican en las curvas de los errores integrales (también en la Figura 6.9): la importante reducción de IAE_2 contrasta con un mayor crecimiento de IAE_1 .

²Nótese que aquí se grafica la salida en torno al punto de operación $y_i^\delta = k_c(h_i - h_i^0)$, mientras que en el Capítulo 5 se graficó la salida del sistema $y_i = k_c h_i$

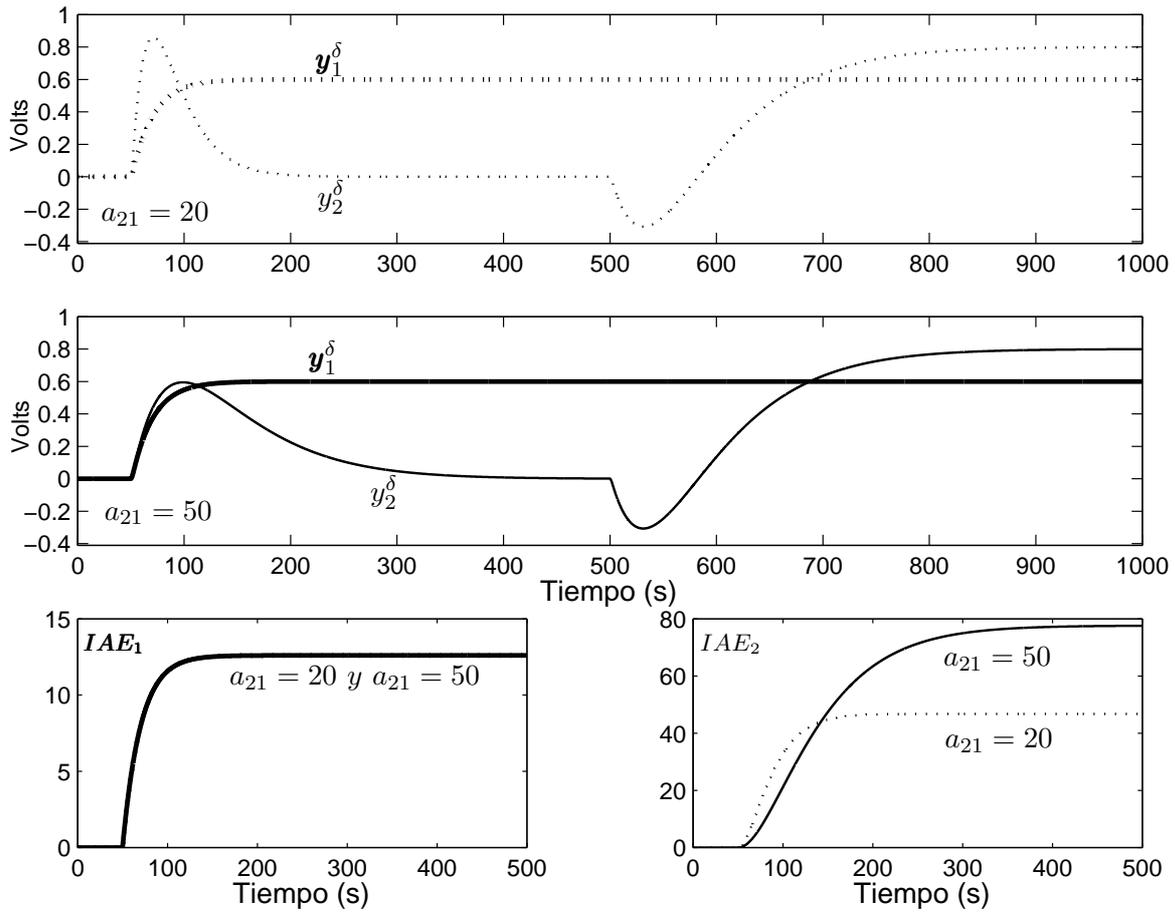


Figura 6.8: Sistema original parcialmente desacoplado. Línea continua: $a_{21} = 50$, línea punteada: $a_{21} = 20$. Evoluciones temporales de las salidas y sus Errores Integrales Absolutos.

Finalmente, el algoritmo propuesto fue probado. Para ello, el autovalor del filtro se tomó como $\lambda_f = -1$, mientras que las superficies de deslizamiento se definieron de la siguiente manera

$$\tilde{s} = \tilde{y}_2^\delta - y_2^\delta - \dot{y}_2^\delta = 0, \quad (6.31)$$

donde $k_2 = 1$. Para obtener la derivada de la salida se deben reemplazar en la representación en variables de estado del tanque cuádruple (5.40) los valores dados en la Tabla 5.1 y las constantes de tiempo para el punto de operación $P+$, resultando

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \begin{bmatrix} -0,0159 & 0 & 0,0256 & 0 \\ 0 & -0,011 & 0 & 0,0179 \\ 0 & 0 & -0,0256 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,0179 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0,0482 & 0 \\ 0 & 0,035 \\ 0 & 0,0775 \\ 0,0559 & 0 \end{bmatrix} u, \\ y^\delta &= \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0 \end{bmatrix} x, \end{aligned} \quad (6.32)$$

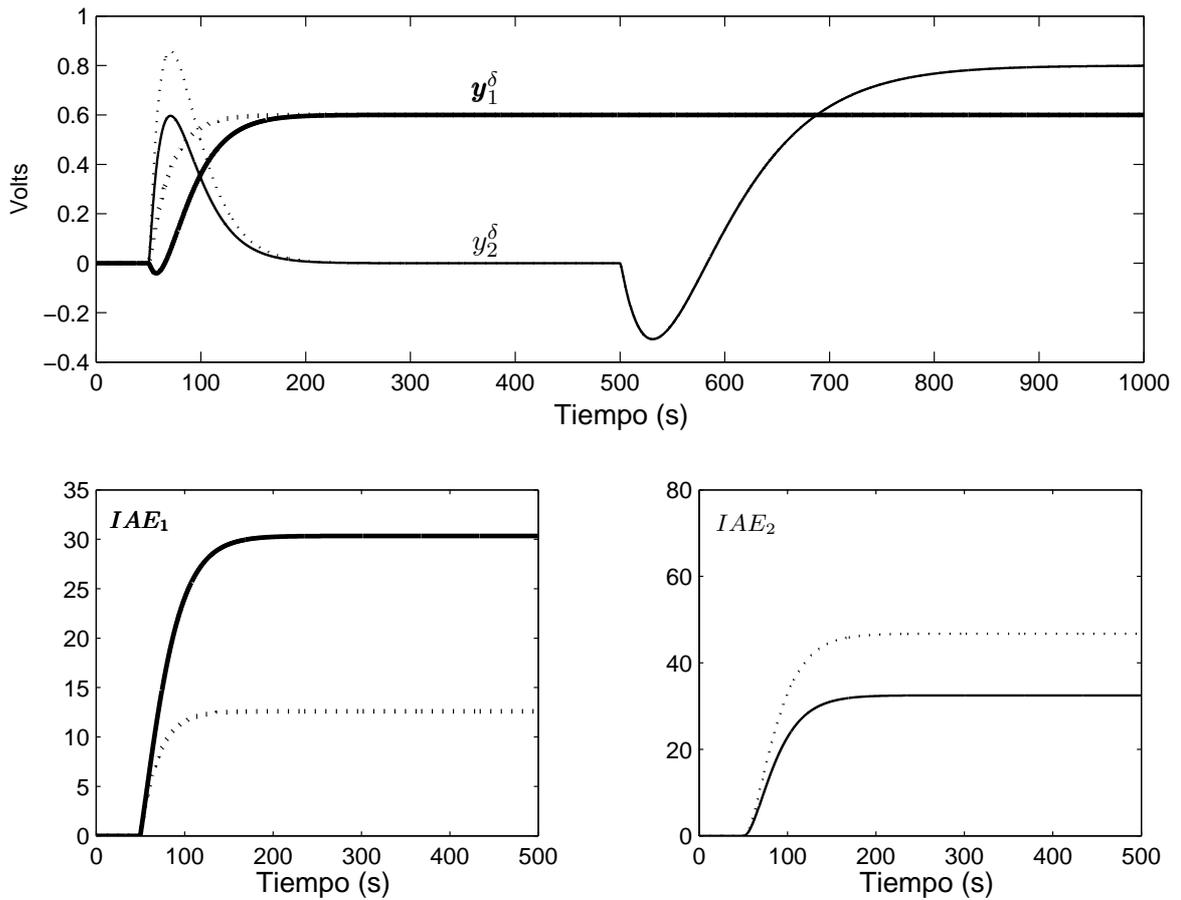


Figura 6.9: Línea continua: sistema con método *Weller-Goodwin*. Línea punteada: sistema original parcialmente desacoplado ($a_{21} = 20$). Evoluciones temporales de las salidas y sus Errores Integrales Absolutos.

De este modo, las superficies (6.31) pueden implementarse como

$$\tilde{s} = \tilde{y}_2^\delta - y_2^\delta + 0,0055x_2 - 0,0089x_4 - 0,0175u_2 = 0. \quad (6.33)$$

El recuadro superior de la Figura 6.10 (línea continua) evidencia que el método efectivamente confina el acoplamiento cruzado a los límites permitidos (amplitud del escalón en r_1) sin transferir características de NMF a la respuesta de y_1^δ . Nuevamente, las respuestas del sistema original se grafican en líneas punteadas. En la parte inferior de la Figura 6.10 se muestra que con la estrategia por MD el error IAE_2 es el mismo que el obtenido con el sistema original, mientras que el índice correspondiente a la variable principal IAE_1 es significativamente más chico que con la estrategia anterior (comparar los valores de IAE_1 en $t = 500s$ de las figuras 6.9 y 6.10).

Es importante remarcar que además de obtener el desacoplamiento completo de la variable principal, el uso de una estrategia centralizada permitió conseguir sin demasiado esfuerzo de diseño tiempos de respuesta varias veces más rápidos que los que se lograron mediante el control descentralizado. Si bien como ya fue argumentado los controladores descentralizados del Capítulo 5 son susceptibles de mejoras, las limitaciones inherentes a la arquitectura de

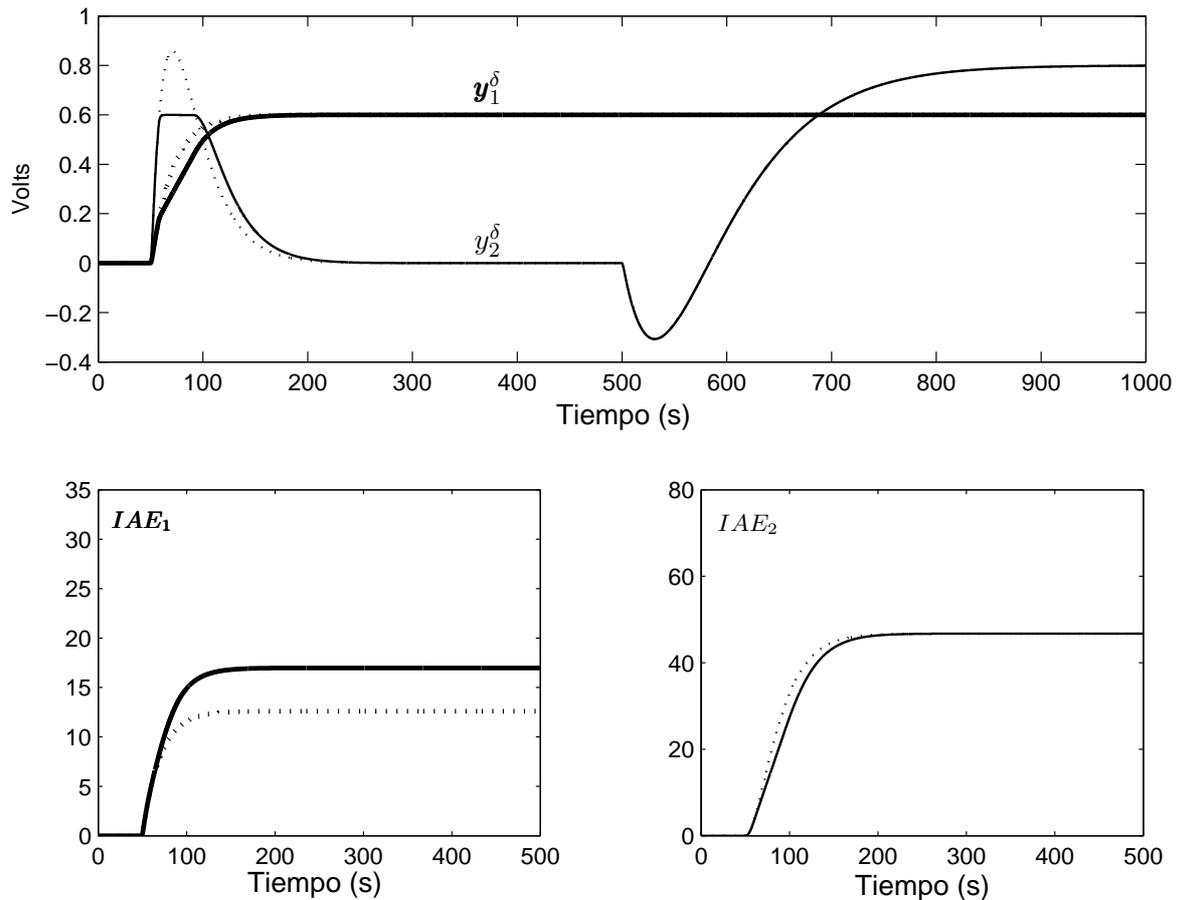


Figura 6.10: Línea continua: método propuesto por MD. Línea punteada: sistema original parcialmente desacoplado ($a_{21} = 20$). Evoluciones temporales de las salidas y sus Errores Integrales Absolutos.

control hacen imposible en general igualar la performance obtenida con controladores MIMO centralizados. Particularmente, en el caso del tanque cuádruple, si se quisiera aumentar la velocidad de respuesta con los controladores PI del capítulo anterior para aproximarse a los tiempos de establecimiento de la Figura 6.10, el lazo cerrado se volvería inestable.

6.5. Resumen del capítulo

En este capítulo se planteó una técnica de control alternativa para relajar los costos del desacoplamiento diagonal en sistemas de no-mínima fase. Por tratarse de una estrategia centralizada, la performance alcanzable es superior a la que resulta de aplicar la propuesta del capítulo anterior, basada en el control descentralizado. Esto es de relevancia en sistemas de NMF, para los cuales no siempre es posible alcanzar los requerimientos de performance mediante estrategias de control multi-lazo.

El método propuesto consiste en limitar el acoplamiento remanente en sistemas de NMF parcialmente desacoplados evitando provocar respuestas inversas en la principal variable a

controlar. El desacoplamiento parcial permite eliminar completamente las interacciones en al menos una variable de interés sin transferir a ella características de NMF, mientras que la compensación por MD adicionada brinda la posibilidad de acotar las interacciones en las restantes variables controladas. Una vez que la corrección se activa, la dinámica con que estas salidas se acercan a sus valores límites puede ser fijada independientemente del diseño del lazo principal de control.

Consecuentemente, el método propuesto constituye una herramienta útil para la operación segura de sistemas MIMO con cierto grado de desacoplamiento, relajando los costos en la performance impuestos por los ceros de no-mínima fase en sistemas desacoplados diagonalmente.

CAPÍTULO 7

CONCLUSIONES

En esta tesis se ha abordado el control de sistemas multivariables con restricciones. Uno de los principales objetivos a lo largo de la tesis ha sido el desarrollo de nuevas estrategias de control que permitan reducir las interacciones cruzadas de los sistemas MIMO, es decir, mejorar su grado de desacoplamiento. Este problema se ha considerado para diferentes limitaciones en la planta (restricciones a la entrada, restricciones a la salida, ceros de no-mínima fase) y distintas estructuras de control (controladores centralizados y descentralizados).

Como un primer paso, se estudiaron las principales características de los sistemas lineales multivariables. Para el diseño de control en este tipo de sistemas se propuso utilizar la estrategia de Control por Modelo Interno (IMC), basada en la parametrización afín de los controladores que estabilizan internamente el lazo de control. Esta estrategia permite diseñar en forma sencilla controladores que desacoplen el lazo cerrado en ausencia de restricciones, ya que el controlador IMC puede calcularse como si se tratara de un precompensador a lazo abierto. A partir de la estrategia IMC se describieron procedimientos de diseño para obtener el desacoplamiento dinámico diagonal de sistemas estables de mínima fase, estables de no mínima fase e inestables. Se analizó a su vez el efecto del desacoplamiento en sistemas con ceros en el semi-plano derecho (SPD). Se mostró que además de acentuar las limitaciones fundamentales de diseño de los sistemas realimentados de control, el desacoplamiento dinámico completo produce un esparcimiento de los ceros en el SPD entre los distintos canales del sistema desacoplado.

También se estudiaron las propiedades fundamentales de los sistemas de estructura variable, ya que los mismos brindan un marco teórico adecuado para el análisis de las estrategias propuestas en la tesis.

En la primera estrategia de control desarrollada se fijó como objetivo preservar el desacoplamiento dinámico de un sistema MIMO en presencia de restricciones en la entrada a la planta. Para ello, se propuso un algoritmo para el acondicionamiento de la referencia mediante una señal auxiliar discontinua. Este método se planteó inicialmente para sistemas monovariantes con controladores bipropios. Se mostró a través de resultados de simulación su

efectividad para tratar diversos problemas en el control de sistemas SISO, como el *windup*, la reducción de transitorios en la conmutación del modo manual al modo automático (algoritmo *bumpless*), o el cumplimiento de determinados requerimientos sobre las señales internas de la planta. Posteriormente, se formuló la metodología para su aplicación en sistemas multivariables que han sido desacoplados dinámicamente mediante controladores propios (bipropios o estrictamente propios) centralizados. En estos sistemas, las restricciones en la entrada a la planta pueden provocar la pérdida del desacoplamiento a lazo cerrado, ya que al alcanzarse alguna limitación se rompe el acoplamiento necesario entre planta y controlador para que el lazo cerrado permanezca desacoplado. Como las restricciones actúan individualmente sobre cada entrada de control, lo que ocurre es que cambia la *dirección* del vector de entrada a la planta respecto a la del vector de salida del controlador multivariable. Este problema fue abordado mediante el acondicionamiento de la referencia por modo deslizante, proponiéndose para las transferencias estrictamente propias un diseño de la superficie basado en la representación canónica normal de las transferencias correspondientes. A diferencia de la mayor parte de los algoritmos que evitan el cambio de dirección del vector de control, el método propuesto no afecta a las variables cuyos set-points permanecen constantes, evitando de esta manera generar transitorios indeseados en estos canales. Se verificó mediante resultados de simulación que la metodología propuesta no sólo evita el cambio de direccionalidad del control, sino que efectivamente preserva el desacoplamiento de sistemas multivariables, tanto de fase mínima como de fase no-mínima, en presencia de restricciones.

En segundo lugar, se efectuó una propuesta para reducir o limitar las interacciones cruzadas en la estructura de control más difundida en la industria para los sistemas multivariables: el control descentralizado o multi-lazo. Se presentaron y ejemplificaron para tal fin algunos conceptos relacionados con esta arquitectura de control, y se analizaron los efectos que las interacciones cruzadas tienen sobre el control descentralizado. Luego, se desarrolló una estrategia basada en el acondicionamiento por MD de la referencia, que en este caso incluye los estados de la planta, para limitar a un valor prefijado la excursión de cada variable controlada ante cambios de set-point en las demás variables. Se demostró además que la estrategia limita también el efecto cruzado de las perturbaciones a la salida. La compensación propuesta mostró ser efectiva para reducir el acoplamiento o establecer cotas de seguridad en estructuras de control descentralizadas, aunque naturalmente la metodología hereda las limitaciones inherentes al control multi-lazo. Para ilustrar el funcionamiento del método se introdujo una planta de laboratorio con cero ajustable conocida como *tanque cuádruple*. Las simulaciones sobre su configuración de no-mínima fase (NMF) verificaron la eficacia del método. Se evaluó también para este ejemplo la influencia de la implementación del método en índices de performance típicos.

Por último, siempre con el objetivo de reducir lo máximo posible las interacciones cruzadas, se propuso una arquitectura de control para los sistemas MIMO de no-mínima fase. Los resultados parciales del trabajo de tesis aportaron dos razones fundamentales para esta nueva propuesta. Por un lado, se mostró y se verificó que en este tipo de sistemas el desacoplamiento dinámico diagonal produce el esparcimiento de los ceros en el SPD, limitando por tanto la performance alcanzable. Por otro lado, se verificó que el control descentralizado no siempre conduce a respuestas satisfactorias para los sistemas de NMF, sino que se requiere para ello de una estrategia centralizada. Consecuentemente, se estudió el desacoplamiento parcial de sistemas MIMO, demostrándose que el mismo relaja las limitaciones impuestas por el desacoplamiento diagonal. La desventaja principal de esta estrategia radica en las interacciones que no son eliminadas, cuya amplitud depende de la dirección de salida de los ceros en el SPD. Por ello, el acondicionamiento por MD de la referencia se utilizó en este problema (derivado

de las restricciones impuestas por los ceros de NMF) para limitar el acoplamiento remanente, evitando afectar la variable principal (desacoplada) con respuestas de tipo inversa. Por tratarse de una estrategia centralizada, la velocidad de respuesta alcanzable es muy superior a la que permite una estrategia basada en controles descentralizados. El método fue comparado con propuestas anteriores, mostrando características muy interesantes, en particular respecto a la respuesta de la variable principal.

Algunas características comunes de las estrategias propuestas que vale la pena remarcar son que: (1) la dinámica del lazo auxiliar de compensación puede diseñarse independientemente de la del lazo principal, permitiendo así fijar la velocidad con que la variable en cuestión alcanza su límite (con lo que pueden evitarse cambios bruscos en las variables controladas o las señales de control que se envían a los actuadores); (2) el acondicionamiento de la referencia sólo se lleva a cabo si se alcanzan los límites prefijados, caso contrario el sistema original no es alterado en absoluto; (3) no hay modo de alcance, y el *chattering* es despreciable, dos problemas que suelen deteriorar la performance de los sistemas de estructura variable.

Para finalizar, cabe destacar que los resultados originales de este trabajo de tesis no se limitan a un problema o proceso en particular. Como sucede en general con la teoría de control, las estrategias aquí propuestas son aplicables a un sinnúmero de sistemas y/o procesos, y permiten abordar a su vez un amplio espectro de problemas.

7.1. Futuras líneas de investigación

Algunas de las líneas de trabajo que pueden seguirse en el corto y mediano plazo a partir de esta tesis son:

- **Acondicionamiento de la referencia para sistemas no-lineales y/o inestables.** Se podría trabajar para ampliar la aplicación de los métodos desarrollados a sistemas no-lineales. Particularmente, a sistemas no-lineales afines en el control, para los cuales las herramientas brindadas en el Capítulo 3 son igualmente válidas. A su vez, la propuesta del Capítulo 4 podría extenderse para abordar las restricciones a la entrada de plantas inestables. Para ello, se debería obtener un conjunto finito de condiciones iniciales y una región invariante dentro del espacio de estados (dado un rango adecuado de señales de referencia), para los que se aseguren los límites de la acción de control y la estabilidad.
- **Aplicación de las estrategias propuestas a problemas concretos.** Vincular las investigaciones teóricas con problemas del control de procesos industriales y de conversión de energía a partir de recursos renovables. Entre las posibles aplicaciones se está evaluando la aplicación de las estrategias desarrolladas en el control de sistemas de conversión de energía eólica, en la industria azucarera y en problemas de bio-tecnología.
- **Pruebas experimentales.** Se prevé la prueba de los métodos desarrollados mediante experiencias de laboratorio. Con este fin se ha comenzado a construir un prototipo del *tanque cuádruple*.
- **Modelado híbrido de las metodologías propuestas y los sistemas con restricciones.** Desarrollo de modelos basados en sistemas híbridos que involucren dinámicas continuas para las distintas regiones de operación en que se activan las restricciones

consideradas y, a su vez, eventos discretos que contemplen el paso entre regiones. Interpretación geométrica de las estrategias propuestas.

- **Empleo de estrategias híbridas de control para sobrellevar los problemas de las restricciones en el control.** Nuevos resultados pueden obtenerse mediante el empleo de una teoría más abarcativa y de creciente desarrollo como la de los sistemas híbridos de control, en particular en relación a la performance alcanzable a lazo cerrado y a los criterios para la estabilidad del sistema restringido.
- **Desarrollo de estrategia *bumpless* multivariable.** La reducción de los transitorios ocasionados al conmutar del modo manual al modo automático puede abordarse con las herramientas de diseño presentadas en esta tesis. En particular, resulta de interés profundizar los estudios respecto a las propiedades de los observadores por MD para este problema en particular.

APÉNDICE A

REDUCCIÓN DE TRANSITORIOS EN PASAJE DE MODO MANUAL A MODO AUTOMÁTICO MEDIANTE MD

En este apéndice se evalúan los atributos de los observadores por MD para evitar o disminuir los efectos transitorios causados por la conmutación del modo manual al modo automático en el control de sistemas MIMO. La aplicación propuesta puede ser interpretada como la construcción de un observador de estados por MD de un controlador ficticio. El enfoque considerado cambia virtualmente la posición de la llave de conmutación de la salida del controlador a etapas internas del mismo. Una característica importante de la metodología considerada es que la misma evita los saltos en la señal de entrada a la planta aún para conmutaciones realizadas antes de que el transitorio del observador se haya extinguido, mientras que al mismo tiempo los restantes estados del controlador se acomodan según la dinámica especificada en el diseño del MD. A diferencia de otras propuestas de la literatura, la metodología empleada es aplicable a controladores de fase no-mínima (en particular, a aquellos controladores de NMF que resultan de desacoplar sistemas con ceros en el SPD). Los resultados que se presentan en este apéndice han sido publicados en (Garelli *et al.*, 2006a).

A.1. Introducción

Una práctica muy común en el control automático de procesos químicos es la conmutación del modo manual –con el cuál se lleva al sistema hasta un punto de operación deseado– al modo automático. Como se mencionó en el Capítulo 4, estos cambios pueden producir saltos en la entrada a la planta sino se toma alguna medida para evitarlo. La supresión de los saltos en la entrada a la planta es conocida como conmutación o transferencia *bumpless*. Además de buscarse este tipo de transferencia, generalmente es deseable poder disminuir los efectos transitorios que la conmutación al modo automático provoca en las variables controladas.

Debido a la importancia práctica de este problema, se han reportado numerosas contribuciones en este tema. Muchas de ellas han abordado los problemas asociados a la conmutación

del modo manual al automático junto con el problema de windup, causado por las restricciones en el control y ya analizado en esta tesis. En particular, una de las técnicas más citadas para resolver este problema es precisamente el acondicionamiento de la referencia propuesto por Hanus *et al.* (1987). Este se basa en el concepto de la “referencia realizable” y fue aplicado a numerosos problemas de la “vida real”. Sin embargo, requiere que el controlador sea cuadrado y de mínima fase, por lo que ha habido varios intentos de relajar estas suposiciones. Uno de ellos digno de ser mencionado es el trabajo de Turner y Walker (2000), basado en ideas de la Teoría Lineal Cuadrática (LQ, Linear Quadratic Theory), que fue luego aplicado al control de un avión V/STOL (Vertical or Short Take-Off and Landing) (Turner *et al.*, 2002). Entre la gran cantidad de trabajos que aparecieron sucesivamente en la literatura para lograr transferencias *bumpless*, se han explotado conceptos de desigualdades lineales matriciales (Linear Matrix Inequalities, LMI) (Mulder *et al.*, 2001), cotas en L_2 para el error en los estados (Zaccarian y Teel, 2002, 2005), realimentación de estados/salidas (Lee *et al.*, 2002; Zheng *et al.*, 2004), y optimización H_∞ (Edwards y Postlethwaite, 1998).

El principal objetivo de este apéndice es ilustrar cómo a través de conceptos elementales del control por estructura variable y los regímenes deslizantes asociados se pueden resolver los problemas que ocasiona la conmutación del modo manual al automático en los sistemas MIMO. La propuesta resultante es aplicable a una gran variedad de controladores, en particular a controladores estrictamente propios y/o con ceros de transmisión en el SPD, y muestra tener algunas propiedades atractivas. A diferencia de otros métodos anteriores –por ejemplo, (Zaccarian y Teel, 2002) y (Zaccarian y Teel, 2005)–, la técnica propuesta no necesita de un modelo de la planta.

A.2. Algoritmo para transferencia *bumpless*

En esta sección se describe el algoritmo por MD para evitar los saltos en la entrada a la planta en la conmutación al modo automático, y se enumeran sus principales características. Para hacer más clara la presentación, el método se explica en primer lugar para el caso de la conmutación entre controladores MIMO idénticos con diferentes condiciones iniciales (a los que se llamará en lo sucesivo *controladores alternativos*). Luego, se analiza la aplicación del método al caso de la transferencia del modo manual al modo automático, lo que se interpreta como una conmutación entre un controlador ficticio (modo manual) y el controlador real (modo automático).

A.2.1. Controladores alternativos

La conmutación entre controladores alternativos, además de simplificar la explicación de la propuesta, es práctica usual en la industria para llevar a cabo el mantenimiento, la reparación o el reemplazo de algún componente del sistema de control. Si bien el controlador conectado al lazo de control (controlador *on-line*) y el que aún no está conectado (controlador *off-line*) son idealmente iguales, los diferentes valores de sus estados producirían un importante transitorio al cambiar de uno a otro si nada se hiciera para evitarlo. Mientras que en el caso de los controladores digitales esto puede resolverse simplemente aplicando al controlador *off-line* los valores de los estados del controlador *on-line* al momento de la conmutación, para controladores analógicos esta inicialización no es tan sencilla. El esquema de la Fig. A.1 se

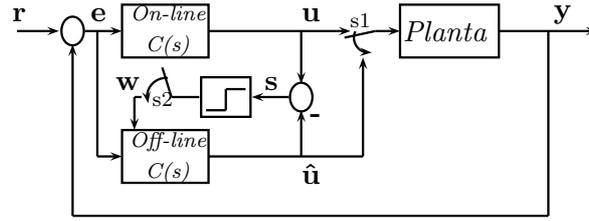


Figura A.1: Conmutación entre controladores alternativos con el algoritmo por MD propuesto

propone para solucionar este problema. La idea básica es forzar los estados del controlador off-line a que coincidan con los del controlador on-line mediante una acción discontinua \mathbf{w} , la cuál depende del signo del error¹.

El controlador on-line se puede describir en el espacio de estados como:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + B\mathbf{e}, \\ \mathbf{u} &= C\mathbf{x} + D\mathbf{e},\end{aligned}\tag{A.1}$$

donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ y $\text{rank}(C) = m$. El par (A, C) se supone observable. Luego, el vector de salida del controlador \mathbf{u} puede ser representado por

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + D\mathbf{e} = C_1\mathbf{x}_1 + C_2\mathbf{x}_2 + D\mathbf{e},\tag{A.2}$$

con $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2]^\top$, $\mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^{n-m}$, $\mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^m$ y $\det(C_2) \neq 0$. Ahora, las ecuaciones (A.1) se reescriben en el espacio $(\mathbf{x}_1, \mathbf{u}_0)$ por medio de la transformación de coordenadas P :

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\mathbf{u}}_0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{u}_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \mathbf{e}, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_0 + D\mathbf{e},\end{aligned}\tag{A.3}$$

donde:

$$PAP^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad PB = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix},\tag{A.4}$$

y

$$P = \begin{bmatrix} I_{n-m} & 0 \\ C_1 & C_2 \end{bmatrix}.\tag{A.5}$$

El esquema no-lineal de la Fig. A.1 puede verse como la construcción de un observador de estados (controlador off-line) MIMO por MD del controlador on-line (A.3). La dinámica de este observador por MD viene dada por:

¹En este apéndice a los vectores se los denota con letra en negrita

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\hat{\mathbf{x}}}_1 \\ \dot{\hat{\mathbf{u}}}_0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 \\ \hat{\mathbf{u}}_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \mathbf{e} \\ &\quad + \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} \mathbf{w}, \\ \hat{\mathbf{u}} &= \hat{\mathbf{u}}_0 + D\mathbf{e}, \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

siendo $\hat{\mathbf{x}}_1$ y $\hat{\mathbf{u}}_0$ las estimaciones de los estados del controlador \mathbf{x}_1 y \mathbf{u}_0 , mientras que $L_1 \in \mathbb{R}^{(n-m) \times m}$ y $L_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ son matrices constantes. La función vectorial discontinua $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^m$ se elige componente a componente como

$$w_i = \begin{cases} w_i^+ & \text{si } s_i(\mathbf{x}) > 0 \\ w_i^- & \text{si } s_i(\mathbf{x}) < 0 \end{cases}, \quad i = 1 \cdots m \quad (\text{A.7})$$

de forma tal que se establezca un MD sobre la superficie \mathcal{S} , definida por

$$\mathcal{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{s}(\mathbf{x}) = \underline{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}} = 0\}, \quad (\text{A.8})$$

siendo $\mathbf{s}(\mathbf{x})$ el vector de las funciones de conmutación, es decir $\mathbf{s}(\mathbf{x}) = [s_1(\mathbf{x}) \ s_2(\mathbf{x}) \ \cdots \ s_m(\mathbf{x})]^\top$. Para el establecimiento del MD, L_2 debe ser positiva definida (Utkin *et al.*, 1999). En particular, puede tomarse $L_2 = I_m$ (matriz identidad).

De esta manera, el error entre el vector de salida del controlador \mathbf{u} y su estimación $\hat{\mathbf{u}}$ se reduce a cero un vez que el sistema alcanza la superficie \mathcal{S} . Es importante recordar que para condiciones iniciales acotadas el tiempo en que el sistema alcanza la superficie \mathcal{S} (*tiempo de alcance*) puede hacerse arbitrariamente corto (Utkin *et al.*, 1999). Así, al establecerse el MD ya se logra un importante objetivo: la supresión de un potencial salto en la señal de entrada a la planta al momento del intercambio entre controladores.

De todas formas, es importante además hacer que todas las otras estimaciones de estados $\hat{\mathbf{x}}_1$ converjan a los estados del controlador on-line \mathbf{x}_1 , de forma tal de minimizar los efectos que sus diferencias producirán en las variables controladas. Para ello, las matrices L_1 y L_2 deben elegirse para que el error $\underline{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{x}_1 - \hat{\mathbf{x}}_1$ disminuya a una velocidad que garantice precisamente que $\underline{\mathbf{x}}_1$ sea pequeño al momento de la conmutación. La dinámica del error en la estimación se obtiene a partir de (A.3) y (A.6), resultando:

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{\mathbf{x}}}_1 \\ \dot{\underline{\mathbf{u}}}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{x}}_1 \\ \underline{\mathbf{u}}_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} \mathbf{w}. \quad (\text{A.9})$$

Como durante el MD $\mathbf{s}(\mathbf{x}) = 0$ y $\dot{\mathbf{s}}(\mathbf{x}) = 0$ (condición de invarianza), el orden de la dinámica se reduce en m y su análisis es similar al de un observador de orden reducido (véanse las conclusiones de la sección 3.9 en el capítulo 3). De la última fila de la ecuación (A.9) el control equivalente $\mathbf{w}_{\text{eq}}(\mathbf{x})$ resulta:

$$\mathbf{w}_{\text{eq}}(\mathbf{x}) = L_2^{-1} A_{21} \underline{\mathbf{x}}_1, \quad (\text{A.10})$$

y reemplazando \mathbf{w} por \mathbf{w}_{eq} en la primera fila de la ecuación (A.9) se obtiene:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}_1 = [A_{11} - L_1 L_2^{-1} A_{21}] \hat{\mathbf{x}}_1. \quad (\text{A.11})$$

Luego, la dinámica con que la estimación $\hat{\mathbf{x}}_1$ converge a \mathbf{x}_1 puede ser arbitrariamente asignada mediante una adecuada elección de la matriz $L_1 L_2^{-1}$. Tomando $L_2 = I_m$, el diseño se reduce a las ganancias de la matriz L_1 .

Comentario A.1 Siempre que la llave $s2$ de la Fig. A.1 esté cerrada, durante el MD el sistema no será afectado por la posición de la llave $s1$, ya que el régimen deslizante forzará a ambos controladores a tener las mismas salidas. De hecho, incluso luego de haber conectado el controlador *off-line* a la planta, la transferencia del controlador no se habrá completado hasta que la llave $s2$ esté finalmente abierta.

A.2.2. Del modo manual al automático

La Fig. A.2 representa un esquema típico para la conmutación manual/automática en sistemas MIMO. Tal como es utilizado en general para los sistemas SISO, la llave de conmutación entre ambos modos de operación también se ubica entre las salidas del controlador y las entradas a la planta en el caso de sistemas multivariables. En la práctica, lo que hace el operador del sistema es dosificar la señal \mathbf{u}_{man} comparando las referencias correspondientes al punto de operación deseado con las variables controladas, y cuando el error y su derivada son suficientemente chicos, conmutar del modo manual al automático .

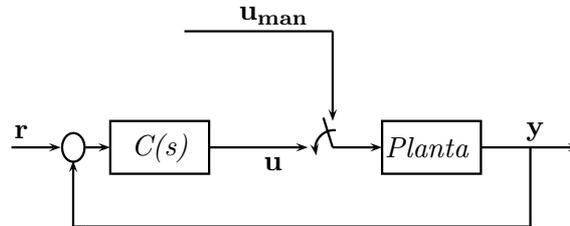


Figura A.2: Esquema general de la conmutación manual-automática

Un diagrama esquemático del método multivariable por MD propuesto en este apéndice se presenta en la Fig. A.3. Obsérvese que ahora la llave ubicada entre las salidas del controlador y las entradas a la planta ha sido eliminada. En lugar de ella, la llave ubicada a la salida del bloque no-lineal es ahora la responsable de la conmutación manual/automática. El establecimiento del MD sobre la superficie

$$\mathcal{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{s}(\mathbf{x}) = \mathbf{u} - \mathbf{u}_{\text{man}} = 0\}, \quad (\text{A.12})$$

fuerza a \mathbf{u} a coincidir con \mathbf{u}_{man} . Así, cuando la llave de la Fig. A.3 está cerrada, el MD permite manipular la entrada a la planta \mathbf{u} por medio de la señal generada en forma manual \mathbf{u}_{man} y a través del controlador *on-line*. Luego, la conmutación desde el modo manual al automático es ahora llevada a cabo abriendo una llave ubicada en etapas internas del controlador, en

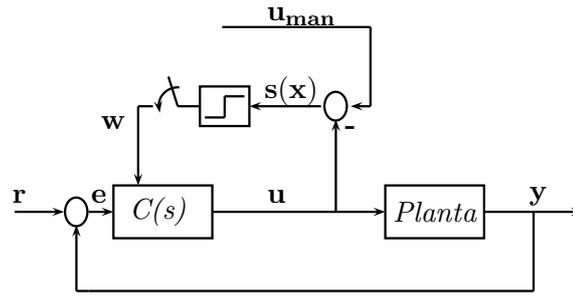


Figura A.3: Esquema propuesto para la conmutación Manual-Automática con el algoritmo por MD

lugar de hacerlo cambiando la posición de una llave en la entrada a la planta. Esto es una particularidad que diferencia a la presente propuesta de los esquemas comúnmente utilizados.

El análisis de la dinámica de esta aplicación es similar al de la subsección previa. De hecho, este caso puede ser visto como si el controlador $C(s)$ fuese un observador de los estados de otro controlador ficticio e idéntico a $C(s)$, a través del cuál se estuviese generando la señal \mathbf{u}_{man} , como muestra la Fig. A.4. Nuevamente, una vez establecido el MD, se evitan los saltos en la entrada a la planta, ya que la señal \mathbf{u} es manejada mediante \mathbf{u}_{man} a través del controlador on-line y no existe ninguna llave en la entrada a la planta.

En realidad, el controlador ficticio representaría una parte del trabajo realizado por el operador del sistema. A diferencia del caso previamente analizado, la entrada a este controlador ficticio \mathbf{e}_f será en general diferente a la entrada del controlador on-line \mathbf{e} . Luego, la dinámica del error en la estimación tiene ahora la siguiente descripción

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\underline{\mathbf{x}}}_1 \\ \dot{\underline{\mathbf{u}}}_0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{x}}_1 \\ \underline{\mathbf{u}}_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \underline{\mathbf{e}} \\ &\quad - \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} \mathbf{w}, \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

donde $\underline{\mathbf{e}} = \mathbf{e}_f - \mathbf{e}$. La dinámica reducida del MD está dada por

$$\dot{\underline{\mathbf{x}}}_1 = [A_{11} - L_1 L_2^{-1} A_{21}] \underline{\mathbf{x}}_1 + f(\underline{\mathbf{e}}, \dot{\underline{\mathbf{e}}}), \quad (\text{A.14})$$

donde $f(\cdot)$ es una función lineal.

Nótese a partir de (A.14) y la Fig. A.4 que si $\underline{\mathbf{e}} = 0$ y $\dot{\underline{\mathbf{e}}} = 0$ este problema es análogo al de la subsección anterior. Dado que la conmutación es realizada cuando \mathbf{e} y $\dot{\mathbf{e}}$ son cercanos a cero, y asumiendo que el controlador on-line fue diseñado para obtener error de estado estacionario nulo, entonces la señal \mathbf{e}_f y su primer derivada serán también cercanos a cero al momento de la conmutación². Por tanto, $\underline{\mathbf{e}} \simeq 0$ y $\dot{\underline{\mathbf{e}}} \simeq 0$ y el último término de (A.14) será pequeño al momento de la conmutación. Consecuentemente, y teniendo en cuenta que la dinámica del MD es mucho más rápida que la operación manual, el error $\underline{\mathbf{x}}_1$, que se corresponde con

²Esto es consecuencia del procedimiento normal de operación, y no debido a una suposición del método.

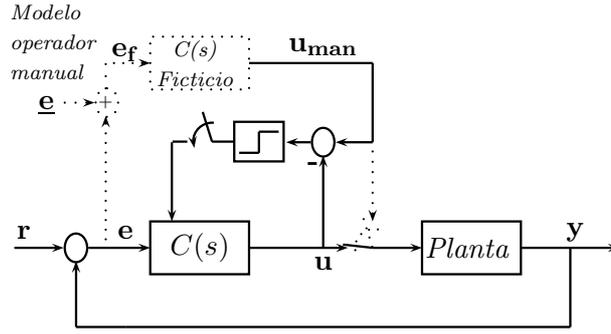


Figura A.4: Interpretación de la transferencia Manual-Automática en términos de controladores alternativos

el error residual e , será también pequeño. De esta manera, si el operador lleva a cabo la conmutación satisfactoriamente (al abrir el lazo del MD) cuando el error es suficientemente pequeño, ningún transitorio afectará la respuesta del sistema. Por otro lado, si el error e no es despreciable para el momento del arranque del modo automático, el sistema responderá a condiciones iniciales residuales (ya que $\mathbf{x}_1 \neq 0$) con la dinámica del lazo cerrado del sistema. Como \mathbf{x}_1 son estados internos del controlador, este efecto aparecerá filtrado en la señal de control u .

Por lo tanto, el método propuesto no sólo elimina los saltos en la entrada a la planta -lo que en sí es denominado transferencia bumpless por varios autores, véase como ejemplo (Peng *et al.*, 1996)-, sino que también reacomoda adecuadamente los estados del controlador durante la operación manual y garantiza buen seguimiento luego de la conmutación al modo automático.

A.3. Ejemplo: Tanque cuádruple

Considérese ahora el tanque cuádruple ya presentado en esta tesis (Johansson, 2000). Aquí se utilizará el modelo no-lineal de esta planta, que está dado por

$$\begin{aligned}
 \frac{dh_1}{dt} &= -\frac{a_1}{A_1}\sqrt{2gh_1} + \frac{a_3}{A_1}\sqrt{2gh_3} + \frac{\gamma_1 k_1}{A_1}v_1 \\
 \frac{dh_2}{dt} &= -\frac{a_2}{A_2}\sqrt{2gh_2} + \frac{a_4}{A_2}\sqrt{2gh_4} + \frac{\gamma_2 k_2}{A_2}v_2 \\
 \frac{dh_3}{dt} &= -\frac{a_3}{A_3}\sqrt{2gh_3} + \frac{(1-\gamma_2)k_2}{A_3}v_2 \\
 \frac{dh_4}{dt} &= -\frac{a_4}{A_4}\sqrt{2gh_4} + \frac{(1-\gamma_1)k_1}{A_4}v_1,
 \end{aligned} \tag{A.15}$$

Recuérdese que los h_i representan el nivel de agua en cada tanque, mientras que A_i y a_i son las secciones transversales de los tanques y de los orificios de salida, respectivamente. Las constantes $\gamma_1, \gamma_2 \in (0, 1)$ las determinan las dos válvulas divisoras de caudal. Las salidas del proceso son señales en Volts generadas por los sensores en los tanques inferiores ($y_1 = k_c h_1$ y

$y_2 = k_c h_2$), y las entradas al sistema son los voltajes v_i aplicados a las dos bombas (el caudal correspondiente es $k_i v_i$).

Los valores de los parámetros del sistema se presentaron en la Tabla 5.1 para los puntos de operación $P-$ (para el cuál el sistema presenta características de mínima fase) y $P+$ (en el cuál se comporta como un sistema de fase no-mínima).

A.3.1. Conmutación entre controladores alternativos (configuración de MF y NMF)

En primer lugar, consideramos la conmutación entre controladores alternativos en el punto de operación $P-$, en el cual el sistema es más simple de controlar. Para evaluar la propuesta bajo condiciones de control exigentes, se diseñó un controlador centralizado para desacoplar completamente el sistema basándose en el modelo linealizado en torno a $P-$ (el controlador resultante tiene 4 estados). Al sistema a lazo cerrado se le aplicaron escalones para $t = 50s$ en r_1 y para $t = 800s$ en r_2 . El controlador alternativo o de *backup* fue conectado al sistema en $t = 0s$ con condiciones iniciales nulas y la transferencia entre controladores se llevó a cabo en $t = 200s$. Las simulaciones se realizaron sobre el modelo no lineal de la planta.

La respuesta del sistema sin ningún algoritmo para evitar los transitorios provocados por el cambio al modo automático se presenta en línea punteada gruesa en la Fig. A.5 (en todas las figuras el instante de conmutación se indica con una línea vertical a puntos y rayas). Si bien en la parte superior de la figura se verifica el desacoplamiento dinámico del sistema (nótese la superposición de la línea punteada gruesa con la línea sólida), en ambas salidas aparece un gran transitorio como consecuencia del cambio abrupto en el vector de entrada a la planta cuando se conmutan los controladores.

Con el fin solucionar este problema, se evaluó la metodología aquí propuesta. Los autovalores que determinan la dinámica de la ecuación (A.11) fueron elegidos como $(-0,1; -0,11)$ por medio de las matrices constantes $L_2 = I_2$ y

$$L_1 = 10^3 \begin{bmatrix} 1,4471 & -2,4758 \\ -0,095 & 0,2027 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.16})$$

La performance del sistema a lazo cerrado con el método por MD incorporado se presenta en línea continua en la Fig. A.5, donde se puede verificar cómo se eliminan los saltos en la entrada a la planta y su efecto sobre las variables controladas. Obsérvese que la conmutación entre controladores se realiza en este caso abriendo el lazo de MD (llave s2 de la Fig. A.1), como muestra la evolución de las señales discontinuas en la gráfica inferior de la figura. Cabe mencionar que en esta simulación se llevó a cabo también un cambio en la posición de la llave en la entrada a la planta (llave s1 en la Fig. A.1) en $t = 100s$ para verificar que el sistema no es afectado por estos cambios durante el MD.

Partiendo del hecho que muchos esquemas anti-windup han sido utilizados en la literatura para resolver problemas asociados a la transferencia manual/automática en sistemas SISO (véanse las referencias de la introducción), y dado que varios de ellos pueden ser interpretados en términos de un observador de estados convencional, también se examinó las respuesta

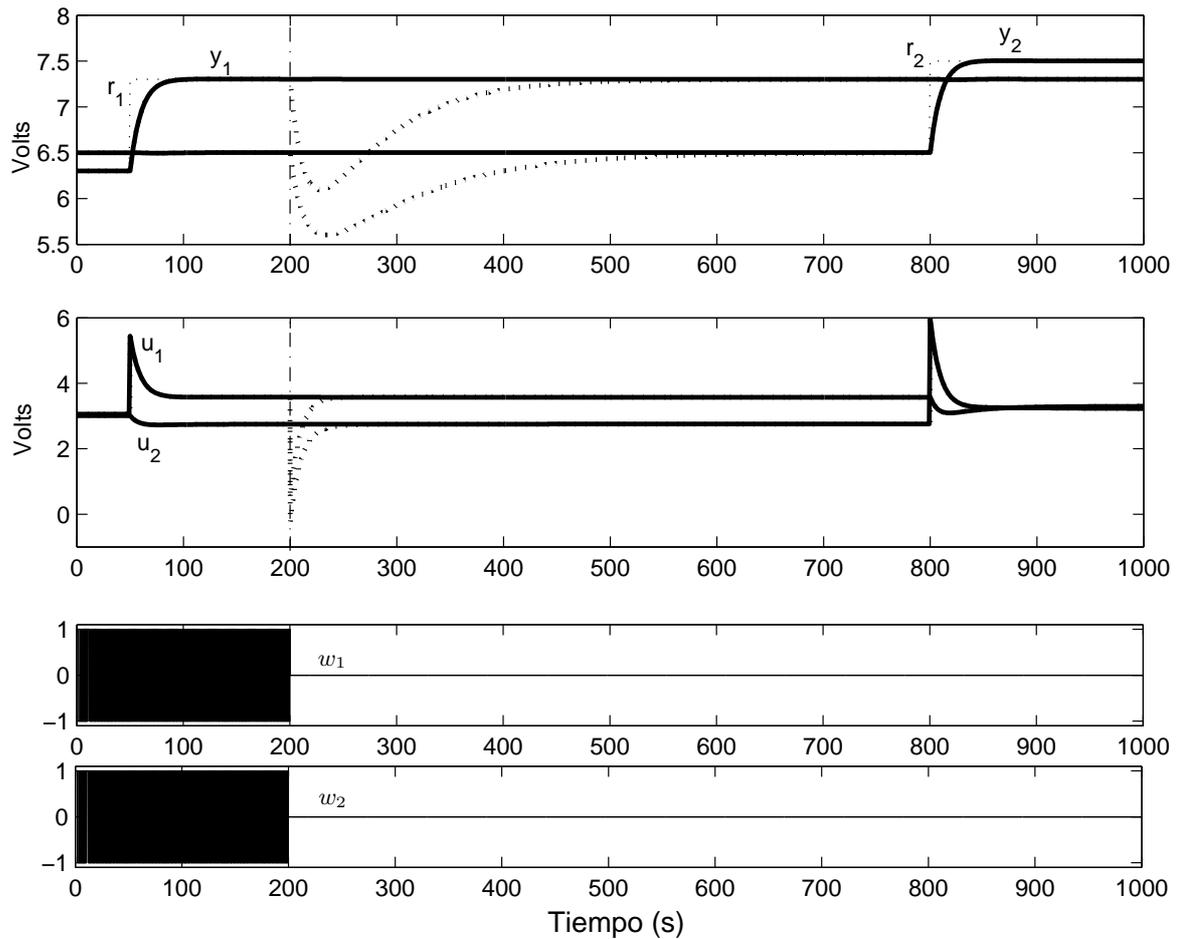


Figura A.5: Conmutación entre controladores en sistema de MF. Línea punteada gruesa: sin ningún método bumpless; línea continua: con diseño por MD.

obtenida con un observador multivariable convencional. Los resultados obtenidos para el sistema de MF considerado fueron similares a los que se obtuvieron con el diseño por MD, con la salvedad de que en este último caso la transferencia se realizó cambiando la posición de la llave $s1$. Sin embargo, las respuestas obtenidas con los dos tipos de observadores no siempre serán parecidas, lo cual se verificará a continuación.

Considérese nuevamente el intercambio entre controladores alternativos, pero ahora para la configuración de no-mínima fase del tanque cuádruple en el punto de operación $P+$, en donde la planta es más difícil de controlar. Una vez más, se diseñó un controlador centralizado para desacoplar dinámicamente al sistema (resultando esta vez un controlador de 5 estados). Luego, debido a que la dirección del cero de fase no-mínima no es canónica (ver Capítulo 6), el controlador deberá necesariamente ser también de fase no-mínima. Esto restringe la aplicación de otros métodos para corregir los transitorios de la conmutación en los lazos de control, como es el caso de la tan difundida técnica de Hanus. Para este punto de operación, asignar los autovalores del observador en el mismo lugar que en el caso de fase mínima lleva a valores extremadamente altos para las ganancias de la matriz L_1 , lo que puede traer problemas con señales ruidosas. Para obtener valores aceptables en estas ganancias, el observador debe diseñarse varias veces más lento que en el caso anterior. En estas condiciones, si la conmutación

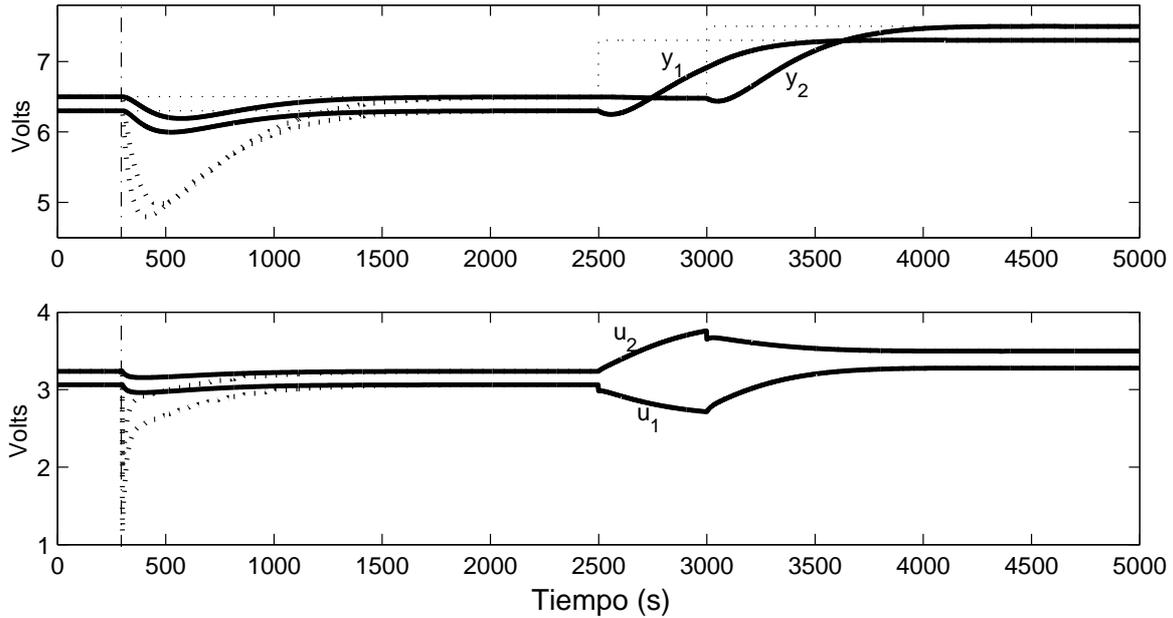


Figura A.6: Conmutación entre controladores en sistema de NMF. Línea punteada gruesa: con observador convencional; línea continua: con diseño por MD.

entre controladores se realiza antes de que los errores del observador se hayan extinguido, y aún asumiendo que $\mathbf{e} = \dot{\mathbf{e}} = 0$, los sistemas con observador convencional y observador por MD tendrán diferentes desempeños para las mismas dinámicas en ambos observadores

Para un controlador off-line conectado nuevamente en $t = 0s$ y una conmutación realizada en $t = 300s$, la respuesta del sistema con un diseño basado en un observador convencional se muestra en línea punteada gruesa en la Fig. A.6. Allí puede observarse el salto abrupto en las señales de entrada a la planta en el instante de la conmutación, y cómo éste afecta seriamente las respuestas en las variables controladas. Las respuestas después de $t = 2500s$ se presentan solamente para mostrar que efectivamente el lazo cerrado está dinámicamente desacoplado (los escalones en la referencia se grafican en línea punteada más delgada).

Contrariamente, el método propuesto fuerza $\mathbf{u} = 0$ durante la operación por MD, lo que asegura que no hay salto en la entrada a la planta (transferencia bumpless). Al mismo tiempo, reduce los errores en la estimación de los estados internos del controlador de acuerdo con (A.11). Como consecuencia de ello, los efectos transitorios en las salidas del proceso se ven significativamente disminuidos (línea continua en Fig. A.6).

A.3.2. Conmutación Manual/Automática (configuración NMF)

Considérese ahora el caso práctico de conmutación del modo manual al automático. La Fig. A.7 muestra la reacción del tanque cuádruple al ser operado manualmente hasta el punto de operación $P+$ y luego conmutado al modo automático en $t = 1000s$, cuando ningún método es empleado para reducir los transitorios (línea punteada) y cuando se utiliza el método propuesto por MD (línea continua), respectivamente. Se ve aquí también que el método propuesto evita los saltos en la entrada a la planta y los efectos transitorios en las variables controladas. El área ampliada verifica que en el modo automático el sistema está desacoplado dinámicamente.

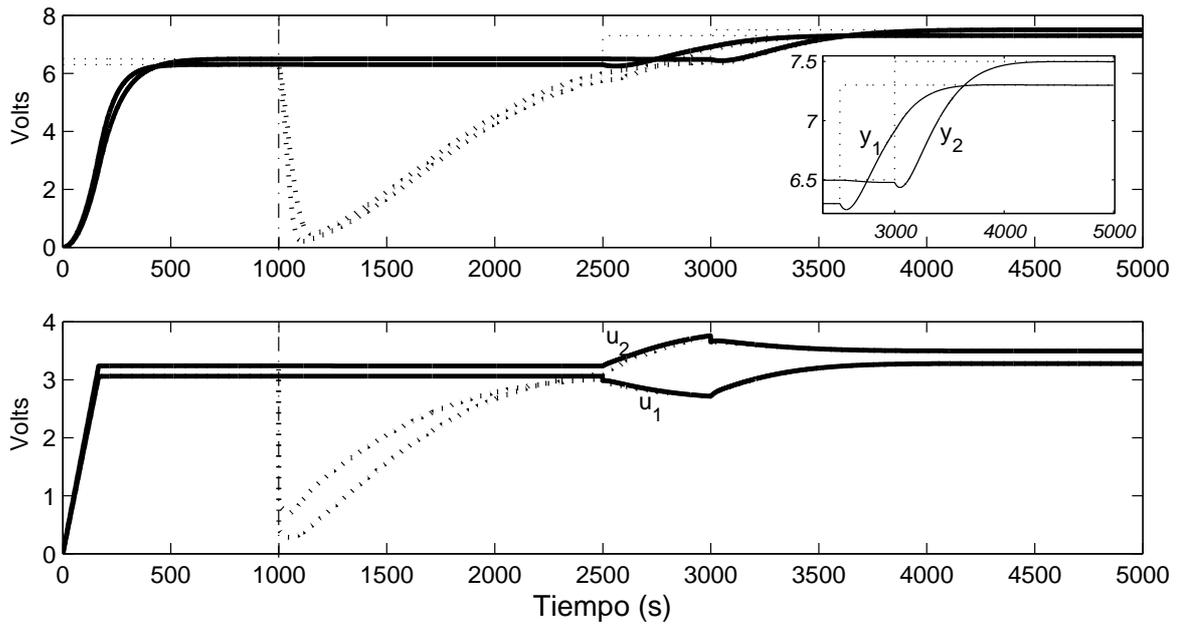


Figura A.7: Conmutación manual-automática en $t=1000s$ para sistema de NMF. Línea punteada: sin ningún método bumpless; línea continua: con diseño por MD.

También se evaluó en este caso el comportamiento del sistema con un observador multivariable convencional. Si bien se encontraron resultados similares para la conmutación efectuada en $t=1000s$ (cuando el transitorio del observador ya se extinguió), las respuestas obtenidas fueron muy disímiles cuando la conmutación se realizó más rápidamente. Esto puede observarse en la Fig. A.8: mientras que para el caso con el observador multivariable convencional hay un gran salto en la entrada a la planta (línea punteada), con el método propuesto no hay salto alguno en ese punto del lazo de control (línea continua). La correspondiente evolución temporal de los estados del controlador \mathbf{x} se presenta en la Fig. A.9, donde los estados internos son $\mathbf{x}_1 = (x_1, x_2, x_3)$ y $\mathbf{u}_0 = (x_4, x_5)$. La columna izquierda corresponde al diseño con un observador convencional, y la derecha al algoritmo por MD. Es importante notar que en el primer caso, para el instante de la conmutación ninguno de los estados del controlador había alcanzado su valor de estado estacionario (observar las diferencias entre la línea punteada horizontal y las curvas graficadas en línea continua en $t = 2500s$). En particular, los estados que aparecen a la salida (x_4 and x_5) estaban lejos de sus valores finales. En cambio, con el método por MD todos los estados estaban más cerca del su valor de estado estacionario al momento de la conmutación. En este caso, los valores de los estados del controlador x_4 y x_5 hasta el momento de la conmutación (durante el MD) son tales que $\mathbf{u} \equiv \mathbf{u}_{\text{man}}$. Luego, como consecuencia de la suavidad en la señal de entrada a la planta y de la evolución de los estados internos, el método propuesto logra mejores respuestas en las variables controladas, lo que se evidencia el gráfico superior de la Fig. A.8.

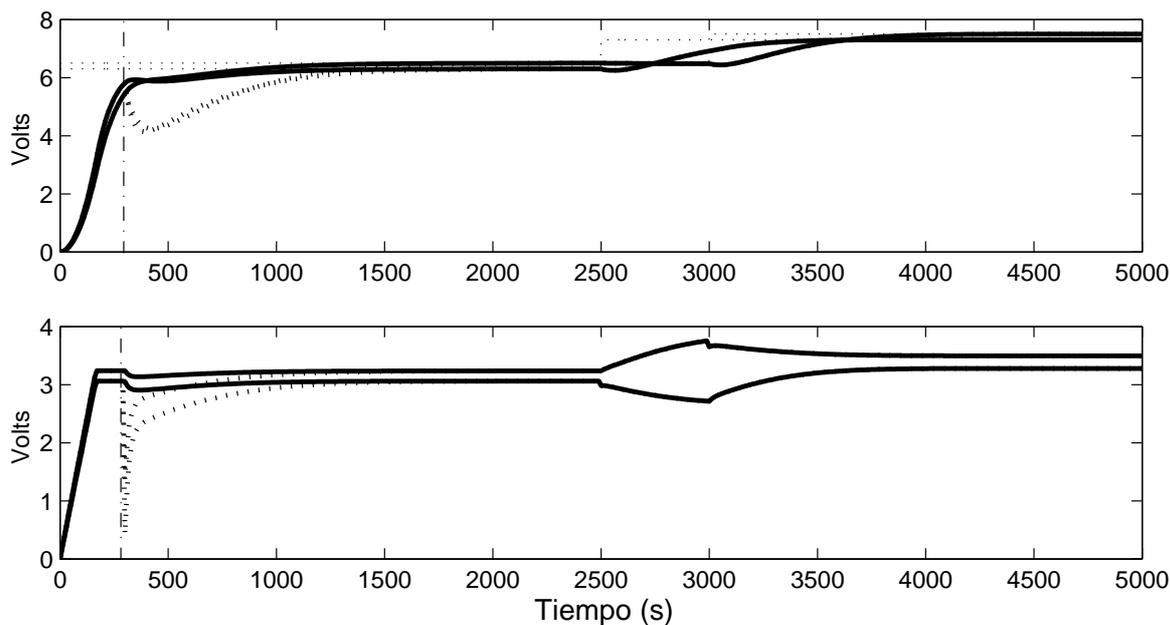


Figura A.8: Conmutación manual-automática en $t=300s$ para sistema de NMF. Línea punteada: con observador convencional; línea continua: con diseño por MD.

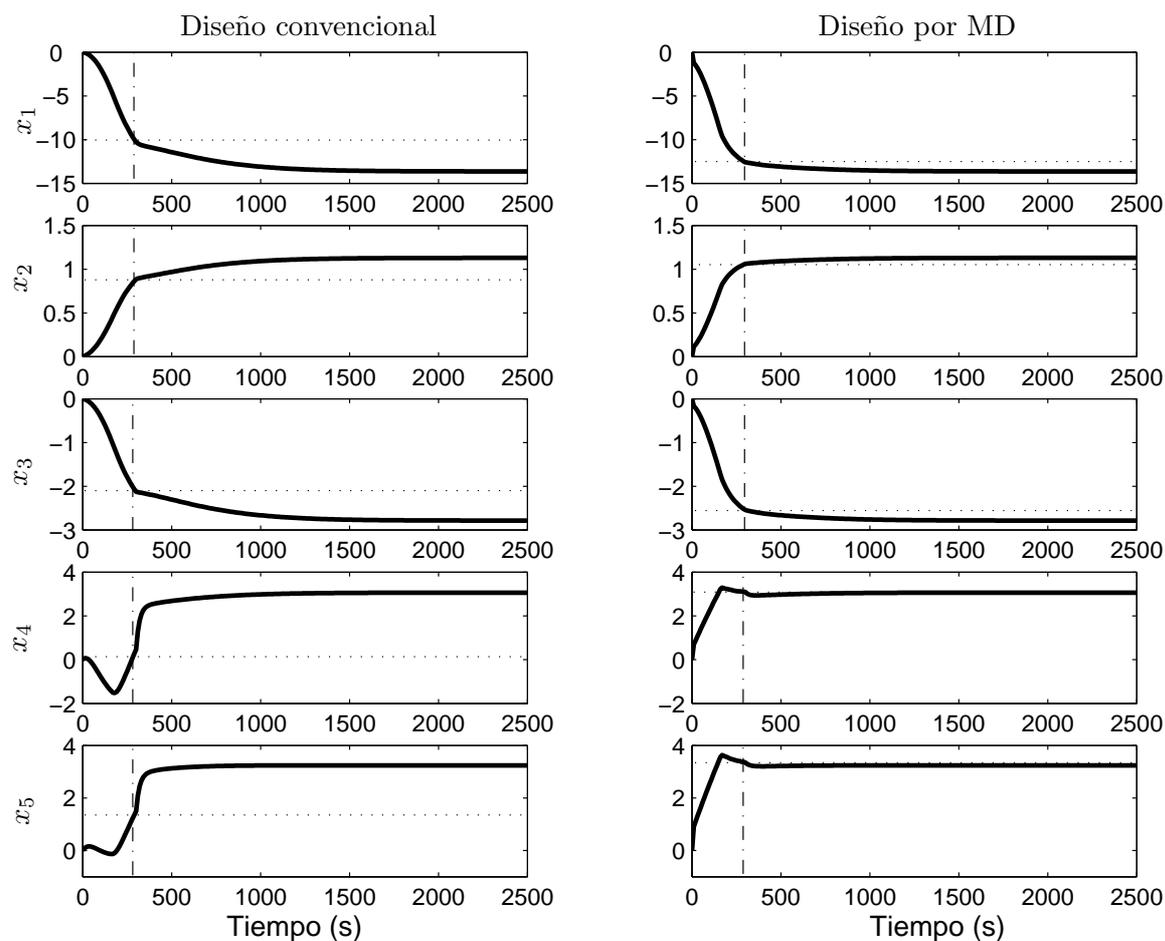


Figura A.9: Evolución de los estados del controlador y diferencia entre sus valores en el instante de la conmutación y en estado estacionario.

A.4. Resumen del apéndice

Se propuso un método para reducir los efectos transitorios de las conmutaciones entre el modo manual y el automático en sistemas MIMO, que está basado en conceptos de la teoría de sistemas de estructura variable y los regímenes deslizante. La metodología evaluada presenta características interesantes, ya que la operación del sistema sobre una superficie de deslizamiento previa a la conmutación logra evitar saltos en la entrada a la planta, mientras que los estados internos del controlador evolucionan con una dinámica definida. Esto permite disminuir los efectos indeseados de las conmutaciones llevadas a cabo antes de que el transitorio en el observador haya finalizado. A su vez, el método asegura buena performance de seguimiento luego de la conmutación. Las simulaciones se realizaron sobre el modelo no lineal del tanque cuádruple para sus configuraciones de fase mínima y fase no-mínima.

APÉNDICE B

ACONDICIONAMIENTO DE POTENCIA EN ELECTROLIZADORES ALIMENTADOS POR TURBINAS EÓLICAS

Aquí se presenta una estrategia de control para un sistema de conversión de energía eólica que alimenta un electrolizador para la producción de hidrógeno. El objetivo es mantener la potencia de salida del generador eólico acorde a los requerimientos de potencia del electrolizador, que constituyen restricciones internas del sistema generador-electrolizador. El método utiliza el acondicionamiento por MD ya presentado en esta tesis para moldear la referencia de potencia de un algoritmo convencional de seguimiento del punto de máxima potencia. De este modo, se obtiene una elevada eficiencia de conversión de potencia aerodinámica y se satisfacen simultáneamente las especificaciones del electrolizador. Como se trata de un sistema monovariable, el esquema de acondicionamiento resulta extremadamente simple. La estrategia presentada ha sido publicada en (Mantz *et al.*, 2005b; De Battista *et al.*, 2006).

B.1. Introducción

La generación de energía eléctrica a partir de fuentes renovables ha tenido un desarrollo significativo durante las últimas décadas. En la actualidad, los sistemas de conversión de energía alternativos se encuentran en diversas aplicaciones, ya sean sistemas autónomos como sistemas conectados a la red eléctrica. Indudablemente, la principal limitación de las “energías limpias” para una mayor penetración en el mercado de generación energética es la intermitencia y la variabilidad estacional de los recursos primarios. Si bien la combinación de diferentes tipos de energías renovables, como por ejemplo la eólica y la solar, ayudan a atenuar esta limitación, el almacenamiento de la energía generada en exceso para su aprovechamiento durante períodos de escasez ha mostrado ser la mejor solución. Con este objetivo, se ha extendido el uso de baterías en sistemas de baja potencia. Sin embargo, en sistemas de mediana y alta potencia esta alternativa no es viable debido a la baja densidad de almacenamiento

(energía/volumen) de las baterías. Una opción que se está volviendo económicamente viable es la producción de hidrógeno mediante la electrólisis del agua para su posterior uso como combustible o en la producción de energía eléctrica. De hecho, el hidrógeno permite tanto el almacenamiento como el transporte de grandes cantidades de energías a altas densidades (Vosen y Keller, 1999; Dell y Rand, 2001; Shakya *et al.*, 2005).

Debido al bajo costo relativo de la tecnología eólica y al continuo crecimiento de la potencia eólica instalada en el mundo, la electrólisis a partir de energía eólica es la alternativa con más posibilidades de convertirse en la primera técnica económicamente viable de producir hidrógeno a partir de fuentes renovables. Para que esto suceda, se necesita –además de una reducción en los costos de la tecnología para la electrólisis– de una optimización del sistema de producción. Muchos trabajos de investigación se han enfocado al dimensionamiento, los costos y el manejo de potencia de los dispositivos que conforman el sistema (energía eólica, electrolizador, baterías, etc.), de forma de garantizar la calidad del servicio a un mínimo costo. Estos problemas están íntimamente relacionados con las características locales de los recursos primarios (Agbossou *et al.*, 2001, 2004; Eskander *et al.*, 2002; Grimsmo *et al.*, 2004).

Básicamente, son dos las alternativas para la configuración de los sistemas autónomos de electrólisis a partir de energía eólica:

En la mayoría de los casos, la turbina y el electrolizador, con su electrónica y controladores, son conectados a un *bus* de tensión constante (bus de continua). En esta configuración los convertidores de potencia de la turbina y el electrolizador pueden controlarse por separado. Un convertidor AC-DC vincula la tensión de frecuencia y amplitud variable generada en la turbina eólica con el voltaje del bus de continua, mientras que un convertidor DC-DC toma la tensión del bus de continua y alimenta al electrolizador con una tensión constante adecuada para su operación. La tensión en el bus de continua se fija mediante un conjunto de baterías, que también manejan las diferencias de potencia entre la turbina eólica y el electrolizador, y sirven de filtro para las fluctuaciones en la potencia de entrada.

Una propuesta más reciente propone eliminar la duplicación de componentes en la interfase entre la turbina y el electrolizador. El par de convertidores de potencia y el bus de continua pueden reemplazarse por un único convertidor AC-DC que tome la tensión AC del generador y provea de una tensión adecuada al electrolizador. De esta forma, se incrementa la eficiencia del sistema de conversión y se reducen los costos del sistema completo (Fingersh, 2003; Elam *et al.*, 2004). Obviamente, esta configuración requiere del desarrollo de controladores específicamente diseñados para esta aplicación. En este apéndice se presenta una estrategia de control de un sistema de producción de hidrógeno en base a energía eólica que adecua la potencia de entrada (proveniente de la turbina eólica) a los requerimientos del electrolizador. Esta estrategia permite entonces reducir sustancialmente el tamaño del sistema para cumplir con determinadas especificaciones.

B.2. Descripción del sistema

B.2.1. La planta

Un diagrama esquemático del sistema considerado se presenta en la Figura B.1. Sus principales componentes son los siguientes:

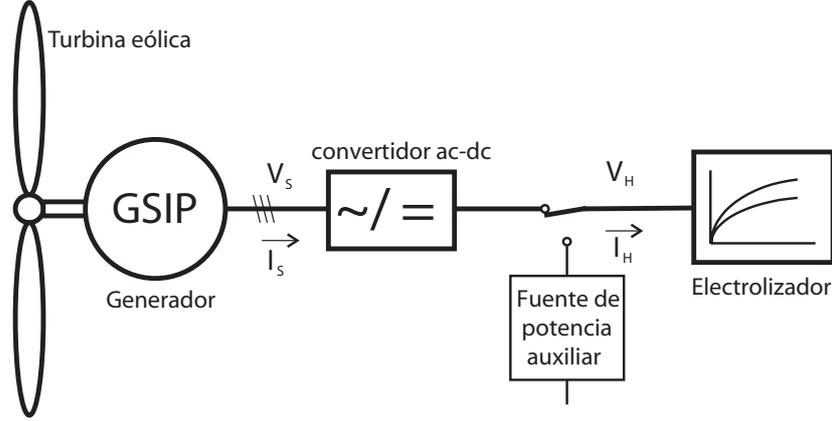


Figura B.1: Esquema del electrolizador alimentado mediante energía eólica.

- *Turbina eólica.* El comportamiento dinámico de la turbina eólica puede describirse mediante la ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{J}(T_T - T_G), \quad (\text{B.1})$$

donde Ω es la velocidad del eje de la turbina, J la inercia de las partes rotantes, T_G el torque eléctrico desarrollado por el generador y T_T el torque aerodinámico:

$$T_T(\lambda, w) = \frac{1}{2}\rho\pi r^3 C_T(\lambda)w^2. \quad (\text{B.2})$$

Como puede apreciarse, el torque aerodinámico es una función no-lineal de la velocidad del viento w y de $\lambda = r\Omega/w$, siendo r el largo de las palas y ρ la densidad del aire. la Figura B.2 muestra el coeficiente de torque C_T (línea a trazos) y la eficiencia de potencia $C_P = \lambda C_T$ (línea continua). La potencia capturada por la turbina puede expresarse como el producto de este último coeficiente y la potencia del viento (Freris, 1990):

$$P_T(\lambda, w) = \frac{1}{2}\rho\pi r^3 C_P(\lambda)w^3. \quad (\text{B.3})$$

De la Figura B.2, se observa que la eficiencia de conversión de potencia tiene su máximo en C_{Popt} , para la relación de punta de pala λ_{opt} . Luego, las turbinas de velocidad fija sólo operan con máxima eficiencia para una única velocidad del viento. Es por ello que comúnmente se implementan controladores de velocidad variable para seguir el punto de potencia óptima $P_{opt}(w) = P_T(\lambda_{opt}, w)$. Estos controladores se conocen como *controladores de seguimiento del punto de máxima potencia* (MPPT, maximum power point tracking).

- *Generador sincrónico de imán permanente (GSIP).* Para los fines de esta aplicación, el generador puede modelarse como una fuente tensión con una reactancia sincrónica. Las variables mecánicas del generador, velocidad y torque, son proporcionales a la tensión V_S y la corriente I_S :

$$\begin{aligned} V_S &= p\Phi\Omega, \\ T_G &= 3p\Phi I_S \cos \phi, \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

donde p es el número de pares de polos magnéticos de la máquina, Φ es el flujo magnético de estator y ϕ el ángulo de fase entre V_S e I_S (Mohan *et al.*, 2003).

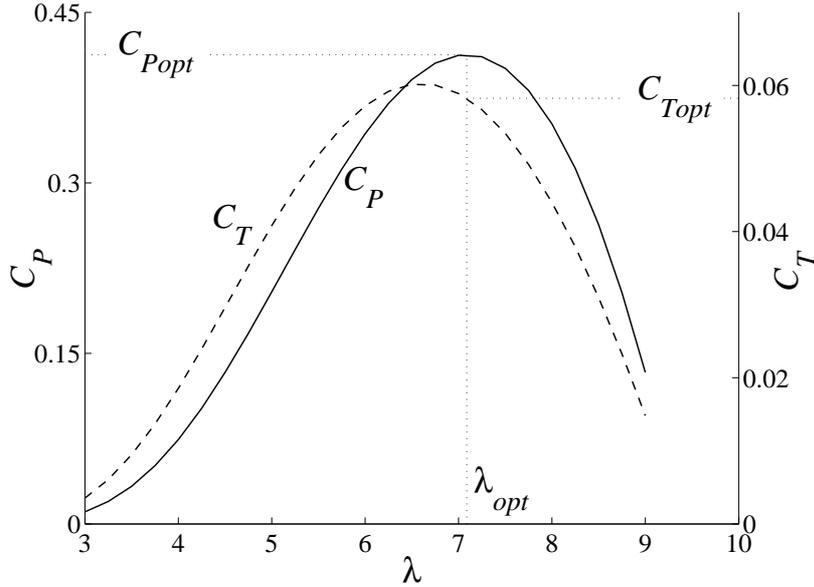


Figura B.2: Coeficientes de torque (línea a trazos) y de potencia (línea continua) de la turbina.

- *Convertidor electrónico.* Su función es convertir la tensión V_S del generador GSIP trifásico en una tensión continua V_H adecuada para la producción de hidrógeno. Como ya fue mencionado, un único convertidor AC-DC constituye la interfase entre la turbina y el electrolizador. Las tensiones de salida y de entrada del convertidor se relacionan a través del factor controlado δ , que está asociado al ciclo de trabajo de los dispositivos electrónicos conmutados. Se supone aquí que $\cos \phi = 1$, es decir, que la tensión y corriente de entrada están en fase. Este es el caso en muchos convertidores AC-DC, como por ejemplo aquellos que tienen un rectificador no controlador en la entrada (Mohan *et al.*, 2003).
- *Electrolizador.* El electrolizador es modelado por una curva corriente-tensión ($I_H - V_H$) obtenida empíricamente. Esta característica $I_H - V_H$ es afectada por la temperatura del electrolito T , y puede ser aproximada por la ley logarítmica (Ulleberg, 2003):

$$V_H = V_r + n(T)I_H + m(T) \lg \left(1 + \frac{q(T)}{T^2} I_H \right), \quad (\text{B.5})$$

donde V_r es la tensión reversible de celda y $n(T)$, $m(T)$ y $q(T)$ son funciones cuadráticas de T . La Figura B.3 grafica las curvas $I_H - V_H$ de un electrolizador von Hoerner de 2.25kW para dos temperaturas (Schucan, 2000).

B.2.2. El controlador

Los sistemas autónomos de producción de hidrógeno requieren de un gran número de lazos de control junto con un control de tipo supervisor. Este apéndice aborda el control del subsistema compuesto por la turbina eólica, el generador, el convertidor AC-DC y el electrolizador. Este subsistema es de particular importancia y requiere ser especialmente controlado por ser el más afectado por la variabilidad del recurso primario (viento). El principal objetivo de control es maximizar la energía capturada por la turbina satisfaciendo simultáneamente

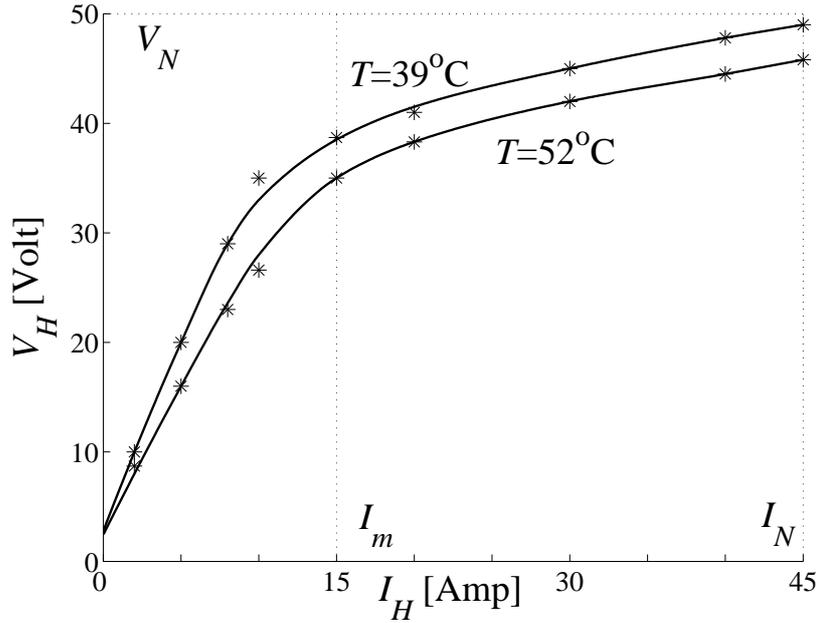


Figura B.3: Característica tensión-corriente del electrolizador.

las siguientes especificaciones para una adecuada operación del electrolizador (Dutton *et al.*, 2000):

1. Si bien la operación a altos niveles de corriente es deseable para mejorar la eficiencia del electrolizador, el sistema debe mantenerse dentro de la región de operación segura. Por tanto, la corriente y la tensión deben estar acotadas por sus valores nominales I_N y V_N , respectivamente.
2. La operación a baja corriente afecta la calidad del producto, por lo que debe garantizarse una corriente mínima I_m minimizando la conexión de la fuente de potencia auxiliar.
3. La variabilidad de la potencia del electrolizador puede incrementar el desgaste interno así como las impurezas y las pérdidas energéticas. Por ello, es importante que la potencia del viento sea suavizada –limitando su velocidad de cambio– antes de suministrarla al electrolizador.

La Figura. B.4 muestra un diagrama del sistema de control que se propone en este apéndice. El mismo consiste de un *controlador MPPT de seguimiento del punto de máxima potencia* convencionalmente usado en el control de turbinas eólicas y un lazo de acondicionamiento de la referencia de potencia propuesto para cumplir con las especificaciones del electrolizador. Este lazo de acondicionamiento se indica con el recuadro en línea punteada.

Por un momento, nos concentraremos en el algoritmo MPPT, suponiendo que el circuito de acondicionamiento no modifica al sistema original, esto es, que $P_R = P^*$. El controlador MPPT consiste de un lazo de control externo y otro interno. El lazo externo calcula la referencia de potencia óptima en función de la velocidad del eje de la turbina, bajo la suposición de que la turbina está operando a la relación de punta de pala óptima λ_{opt} :

$$P^*(\Omega) = P_{opt}(r\Omega/\lambda_{opt}) = \frac{1}{2}\rho\pi r^5 \frac{C_{Popt}}{\lambda_{opt}^3} \Omega^3. \quad (\text{B.6})$$

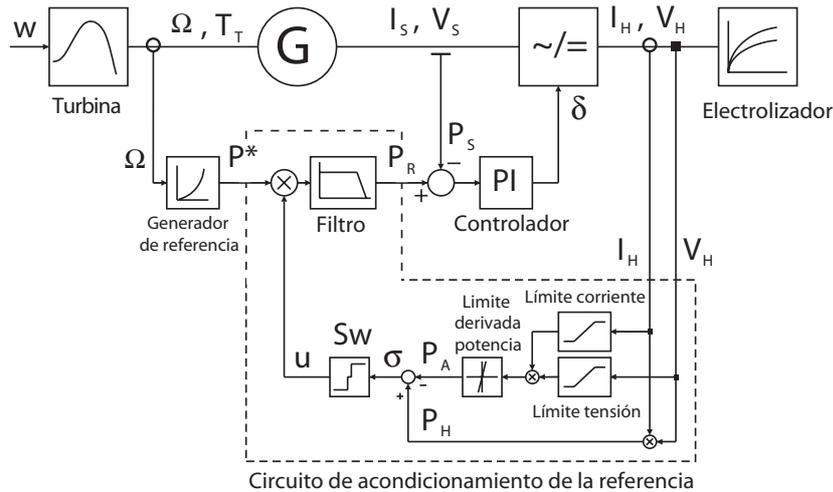


Figura B.4: Esquema del sistema de control con el acondicionamiento de la referencia propuesto.

El lazo interno, por su parte, ajusta el ciclo de trabajo del convertidor electrónico para seguir la referencia de potencia P_R . En este lazo, usualmente se emplea un controlador PI convencional para cancelar los errores de estado estacionario. Como resultado, la velocidad de la turbina Ω converge al valor óptimo $\Omega_{opt}(w) = \lambda_{opt}w/r$, y la potencia a su valor máximo.

El control MPPT (que opera a velocidad variable) tiene una ventaja adicional con respecto a la operación a velocidad fija. La mayor flexibilidad de conexión a la red eléctrica proporciona amortiguamiento a la frecuencia de resonancia del tren de transmisión, y de esta manera reduce las oscilaciones de alta frecuencia del torque y la potencia. A pesar de esta mejora en la calidad de potencia, las estrategias de control MPPT usualmente violan las especificaciones particulares del electrólizador. De hecho, la potencia capturada puede exceder la potencia nominal del electrólizador, y debe entonces ser limitada. A su vez, los esfuerzos de torque realizados para seguir el punto de máxima operación se traducen en cambios rápidos en la potencia eléctrica que son transmitidos al electrólizador a través de los dispositivos electrónicos, lo que constituye un problema que no es fácil de solucionar. Por un lado, suavizar la referencia de potencia $P^*(\Omega)$ puede llevar a respuestas transitorias indeseadas. Además, la turbina podría frenarse hasta parar si la velocidad del viento cayera. Por otro lado, hacer más lento el lazo interno puede hacer inestable a todo el sistema. Luego, una alternativa viable para afrontar este problema sería diseñar un controlador MPPT teniendo en cuenta las especificaciones del electrólizador desde el inicio. Esto es relativamente complejo debido al comportamiento no-lineal de todos los dispositivos que conforman el sistema.

Aquí se estudia un enfoque completamente diferente. Si bien se usan también ideas del control de seguimiento de potencia, se incorpora ahora un lazo de acondicionamiento de la referencia. El objetivo de este lazo es moldear la referencia de potencia de forma tal de limitar la derivada de la potencia de entrada y las magnitudes de la corriente y la tensión. Luego, se incrementa la energía capturada mientras que se cumple con los requerimientos del electrólizador. El acondicionamiento de la referencia se lleva a cabo de manera controlada, preservando de esta manera la estabilidad del sistema. Esta propuesta se describe en detalle en la siguiente sección.

B.3. Acondicionamiento de la potencia del electrolizador

En esta sección se presenta el algoritmo de control basado en el acondicionamiento por MD de la referencia para satisfacer los requerimientos del electrolizador mencionadas en la sección anterior.

Potencia admisible

Los límites en la tensión, la corriente y la velocidad de cambio de la potencia de entrada necesarios para una correcta operación del electrolizador pueden combinarse en un límite superior de potencia $\overline{P}_A(t)$ y otro límite inferior de potencia $\underline{P}_A(t)$. La cota superior $\overline{P}_A(t)$ queda determinada por los valores I_N o V_N , o bien por el límite superior en la derivada de la potencia; mientras que la cota inferior $\underline{P}_A(t)$ la establece la corriente mínima I_m o bien el límite inferior en la derivada de la potencia. Se define ahora la potencia admisible $P_A(t)$, que se construye pasando la corriente del electrolizador por un limitador de amplitud con nivel de saturación superior I_N e inferior I_m , la tensión por otro con nivel superior V_N y el producto tensión-corriente por un limitador de velocidad de cambio (*rate limiter*). De esta forma, la potencia admisible cumple $\underline{P}_A(t) \leq P_A(t) \leq \overline{P}_A(t)$ para todo instante de tiempo t . Consecuentemente, las especificaciones del electrolizador serán satisfechas siempre que la potencia real en el electrolizador sea igual a la potencia admisible ($P_H(t) = P_A(t)$).

En base al análisis anterior, se define la siguiente función de conmutación:

$$\sigma = P_H - P_A(t). \quad (\text{B.7})$$

Al igual que en las aplicaciones vistas a lo largo de la tesis, $\sigma \equiv 0$ determina una región en el espacio de estados en la que P_H queda limitada por sus valores límites $\underline{P}_A(t)$ y $\overline{P}_A(t)$. Esta región, definida por $\mathcal{R} = \{\sigma = P_H - P_A(t) = 0\}$, está delimitada por dos superficies variantes en el tiempo: $\overline{\mathcal{S}} = \{\overline{\sigma} = P_H - \overline{P}_A(t) = 0\}$ y $\underline{\mathcal{S}} = \{\underline{\sigma} = P_H - \underline{P}_A(t) = 0\}$.

El lazo de acondicionamiento

El circuito de acondicionamiento dentro de las líneas punteadas en la Figura B.4 está compuesto por un bloque dedicado a calcular la potencia admisible P_A , un comparador para formar la función de conmutación σ , una lógica de conmutación que determina la señal de control u y un filtro pasa-bajos de primer orden F . Nótese que este lazo de acondicionamiento puede implementarse como un conjunto de instrucciones en el software de un controlador MPPT. Luego, el único hardware adicional será el necesario para realizar la medición de las variables eléctricas del electrolizador.

Es importante remarcar que también en esta aplicación el filtro F se diseña suficientemente rápido como para no introducir retardos apreciables en el sistema. El lazo de acondicionamiento modifica la salida del filtro P_R (que es una señal suave) en función de las especificaciones del electrolizador.

Lógica de conmutación

En primer lugar, se debe chequear el grado relativo de la función de conmutación σ con respecto a la señal discontinua u . Nótese para ello que σ y u son la salida y la entrada de la conexión en cascada del filtro F , el controlador PI y el convertor AC-DC. El filtro y el controlador PI son sistemas dinámicos lineales que pueden describirse mediante las funciones de transferencia

$$\begin{aligned} F : F(s) &= \frac{1}{1 + s\tau_F}, \\ PI : C(s) &= K_P \left(1 + \frac{1}{s\tau_C} \right), \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

donde τ_F es la constante de tiempo del filtro, K_P la ganancia proporcional y τ_C el tiempo integral del controlador. El convertor AC-DC puede representarse mediante relaciones estáticas entrada-salida. Mientras el filtro F tiene grado relativo unitario, el controlador PI y el convertor AC-DC (sus salidas V_H e I_H dependen explícitamente de su entrada δ) tienen grado relativo nulo. Luego, el sistema en cascada $F - PI - \sim/\neq$ tiene efectivamente grado relativo unitario, por lo que se cumple la condición necesaria para el establecimiento del MD sobre las superficies $\overline{\mathcal{S}}$ y $\underline{\mathcal{S}}$. Para el establecimiento del MD en los límites de la región de operación deseada \mathcal{R} se propone la siguiente lógica de conmutación:

$$Sw : \begin{cases} u^- &= 1 & \text{if } \sigma < 0 \\ u^0 &= k & \text{if } \sigma = 0 \\ u^+ &= 0 & \text{if } \sigma > 0 \end{cases} \quad (\text{B.9})$$

Los valores límites de la acción de acondicionamiento corresponden a la referencia de potencia óptima ($u \equiv 1$) y a la referencia de potencia cero ($u \equiv 0$). La señal $u^0 = k < 1$ se diseña de acuerdo a un compromiso entra energía capturada y control disponible. En efecto, k cercanos a 1 hacen incrementar la energía capturada durante la operación en la región deseada ($\sigma \equiv 0$), pero reducen la capacidad de acondicionar la potencia del electrolizador ante caídas bruscas de la velocidad del viento. Este tipo de compromiso es común en el control de sistemas de energía eólica cuando la calidad de potencia suministrada a la red o la carga es de importancia. En la presente aplicación, el sacrificio de algún porcentaje de energía eólica puede ser enormemente provechoso para mejorar la calidad de potencia del electrolizador y del hidrógeno producido.

Operación del lazo de acondicionamiento

Supóngase que inicialmente la potencia de entrada al electrolizador satisface las especificaciones, y por tanto $u = u^0 = k$. Si la velocidad del viento (y consecuentemente la referencia de potencia P_R) crece hasta que se alcanzan los límites de tensión/corriente en los terminales del electrolizador, o la derivada de la potencia alcanza su máximo, la potencia en el electrolizador $P_H(t)$ alcanzará su máximo permitido $\overline{P_A}(t)$. Inmediatamente después de que $P_H(t)$ intente exceder $\overline{P_A}(t)$, u conmutará a $u^+ = 0$ y se reducirá así la referencia de potencia. Entonces, u retorna a su valor original $u^0 = k$, pero P_H intentará exceder nuevamente $\overline{P_A}(t)$ en la medida que la velocidad del viento siga siendo elevada. Consecuentemente, se producirán conmutaciones a alta frecuencia entre $u = k$ y $u = 0$, estableciéndose un modo deslizante sobre $\overline{\mathcal{S}}$ hasta que las limitaciones se inactiven ($P_H \equiv P_A(t)$ con $u = u^0$), lo que ocurrirá cuando

la velocidad del viento disminuya. De forma análoga, cuando P_H intenta caer por debajo de \underline{P}_A por la disminución de la velocidad del viento, u conmuta a $u^- = 1$, intentando aumentar la potencia suministrada para retornar a la región de operación deseada. En este caso, se establece un régimen deslizante sobre \underline{S} , con u conmutando entre $u = k$ y $u = 1$.

Nótese que el control disponible para atenuar los efectos de las variaciones del viento en los sistemas de energía eólica es limitado. En esta aplicación, esto significa que el modo deslizante no podrá mantenerse bajo reducciones drásticas de la velocidad del viento, en cuyo caso se deberá conectar la fuente de potencia auxiliar. Esta limitación no es propia de la estrategia de control, sino que está íntimamente ligada a la variabilidad del recurso viento.

B.4. Resultados de simulación

Los resultados que se presentan a continuación fueron obtenidos para un sistema como el mostrado en la Figura B.1 con un electrolizador de $2,25kW$ y una turbina de $5kW$ más un generador de inducción de imán permanente. Por simplicidad, la temperatura T del electrolito se consideró constante. Bajo esta suposición, los límites en la corriente o la tensión llevan a límites constantes en la señal de potencia. El perfil de viento utilizado en las simulaciones se presenta en la Figura B.5. El mismo fue intencionalmente elegido para evaluar la performance de la estrategia de control bajo condiciones extremas.

Control de seguimiento del punto de máxima potencia, MPPT.

En primer lugar, se presentan los resultados obtenidos con el algoritmo MPPT convencional. Estos resultados se muestran en la Figura B.6, en la cual el recuadro (a) grafica la potencia capturada por la turbina y suministrada al electrolizador, y el recuadro (b) el perfil de velocidad óptimo superpuesto con la velocidad real de la turbina. La velocidad óptima (para maximizar la potencia capturada) se sigue satisfactoriamente. Luego, la potencia del electrolizador también se superpone con la potencia óptima de la turbina $P_{opt}(w)$. Nótese que si bien el punto de operación óptima de la turbina se sigue correctamente, la respuesta del algoritmo MPPT no cumple con los requerimientos de potencia del electrolizador. De hecho, la potencia suministrada reproduce los cambios abruptos del viento, excediendo durante algunos intervalos de tiempo su límite superior ($2,25kW$), cayendo por debajo de su límite inferior ($0,35kW$ para este ejemplo) y presentando también variaciones excesivamente rápidas.

Acondicionamiento de potencia por MD.

Los resultados obtenidos con la técnica propuesta se muestran en la Figura B.7. El gráfico (a) exhibe la potencia suministrada al electrolizador P_H (que sigue la referencia acondicionada P_R), el (b) velocidad de la turbina, el (c) la señal de control discontinua, y el (d) la evolución de la función de conmutación.

El algoritmo utilizado en este caso es básicamente el algoritmo convencional MPPT donde la referencia de potencia se obtiene a partir de multiplicar $P^*(\Omega)$ por un coeficiente $k < 1$,

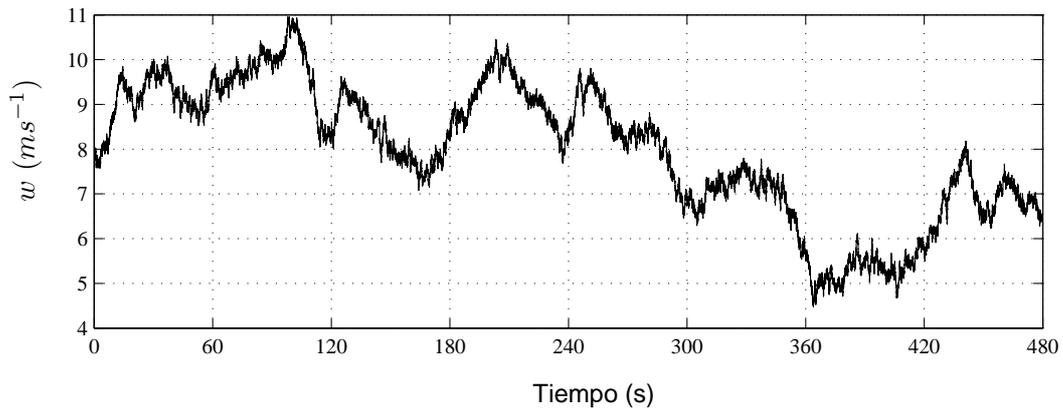


Figura B.5: Perfil de velocidad de viento.

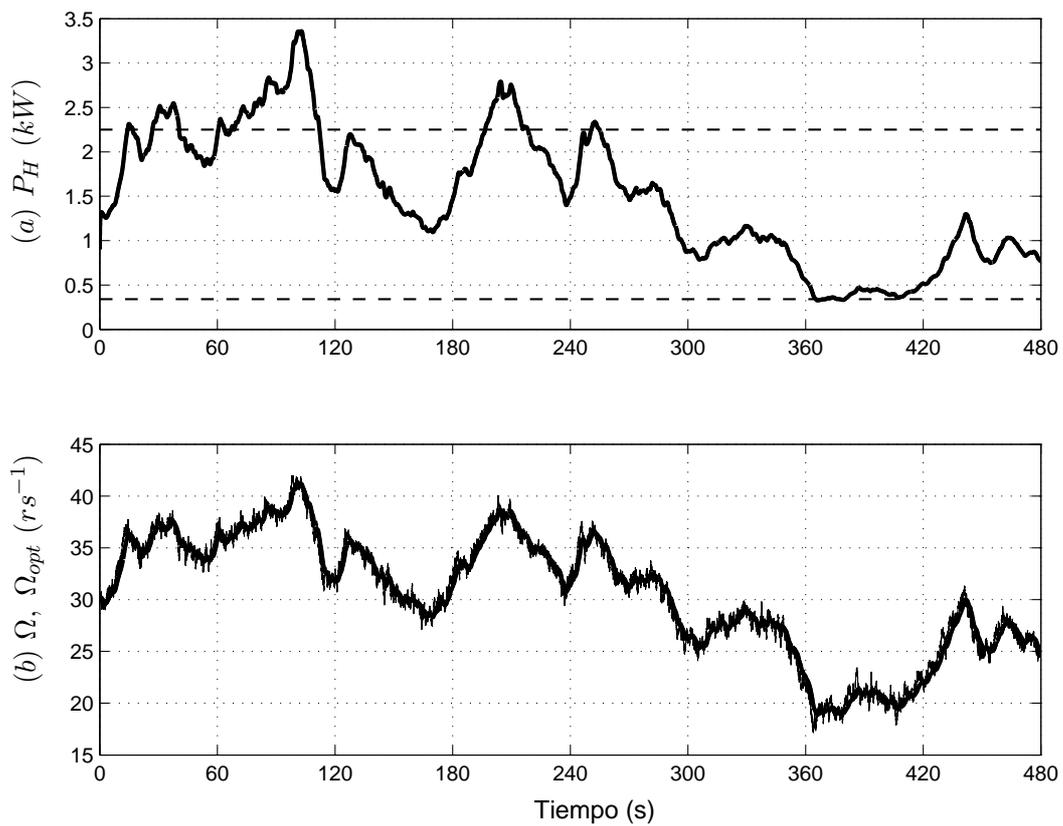


Figura B.6: Resultados con algoritmo MPPT (sin acondicionamiento de potencia). (a) Potencia del electrolizador. (b) Velocidad real (trazo grueso) y óptima (trazo ruidoso, superpuesto) de la turbina.

más precisamente $k = 0,7$. Esto es, $P_R = 0,7P^*(\Omega)$. Si bien no se muestra en las figuras, con este algoritmo la potencia del electrolizador también viola los límites máximos y mínimos y de velocidad de cambio. Por ello, se le incorpora aquí el lazo de corrección por MD propuesto.

Los resultados de simulación corroboran la efectividad del acondicionamiento por MD. La potencia del electrolizador está acotada por sus correspondientes límites, tanto en amplitud como en su derivada, lo que mejora la calidad de la potencia suministrada al electrolizador.

Como se observa en la Figura B.7c, la respuesta alterna intervalos de acondicionamiento por MD con períodos en los que no existe corrección alguna. Los períodos de corrección por MD pueden identificarse por la conmutación a alta frecuencia que experimenta la señal discontinua u . A su vez, se aprecia que el MD se establece sobre la superficie $\bar{\sigma} = 0$ cuando u conmuta entre u^0 y 0, y sobre la superficie $\underline{\sigma} = 0$ cuando u varía entre u^0 y 1. El lazo de acondicionamiento está inactivo durante los períodos en que u es igual a $u^0 = k$.

La Figura B.7a muestra cómo el lazo de corrección moldea la potencia del electrolizador con el objetivo de satisfacer sus especificaciones. Desde $t = 0$ s hasta $t = 34$ s, por ejemplo, el MD limita P_H a su máxima tasa de crecimiento a pesar que la potencia del viento crece rápidamente. En forma similar, entre $t = 40$ s y $t = 54$ s el MD garantiza que la tasa de decrecimiento se mantenga en su mínimo valor admisible. El MD entre $t = 78$ s y $t = 114$ s restringe I_H (y luego P_H) a su valor máximo admisible. Finalmente, desde $t = 365$ s a $t = 382$ s, el MD incrementa la referencia de potencia para evita que I_H caiga por debajo de I_m . Durante otros períodos, la potencia del electrolizador evoluciona suavemente dentro de su región de operación deseada si acondicionamiento por MD, como por ejemplo, entre $t = 382$ s y $t = 430$ s.

La Figura B.7b ilustra cómo la turbina ajusta su velocidad de forma tal de suministrar la potencia adecuada al electrolizador. Nótese que la velocidad es superior a la de máxima transferencia de potencia la mayor parte del tiempo, particularmente durante la corrección para evitar superar los límites máximos, mientras que se aproxima a Ω_{opt} durante el acondicionamiento en torno a las cotas inferiores.

Por último, la Figura B.7d confirma que el método mantiene a P_H dentro de su región deseada ($\sigma \equiv 0$), a excepción de un corto período de tiempo en torno a $t = 120$ s. Durante este período, en que la velocidad del viento decrece muy rápidamente, el lazo de acondicionamiento aplica el máximo control disponible para aumentar tanto como sea posible la potencia capturada. En efecto, en este intervalo de tiempo el controlador se comporta como un algoritmo MPPT. Este comportamiento no es sencillo de evitar, debido al limitado control disponible, y como se mencionó está relacionado con el compromiso en el diseño de k entre la energía capturada y la calidad de potencia. Si bien el MD no se puede mantener durante este corto período de tiempo (debido al perfil de viento extremo que se eligió), la respuesta del sistema acondicionado muestra tener muchas ventajas con respecto al caso sin acondicionamiento.

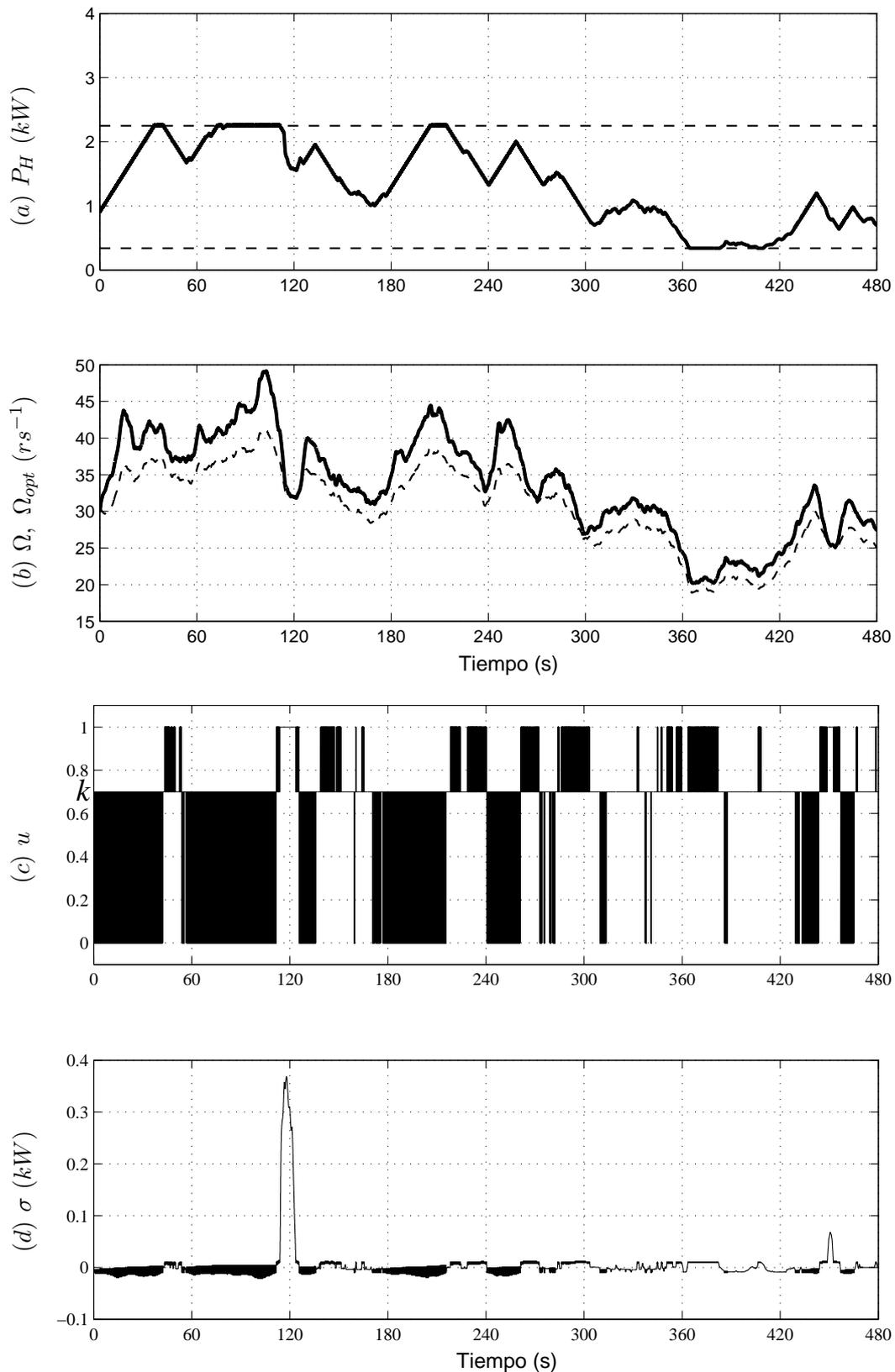


Figura B.7: Resultados con acondicionamiento de potencia por MD. (a) Potencia del electrolizador. (b) Línea a trazos: velocidad de la turbina para máxima transferencia de potencia ($k = 1$); Línea continua: velocidad de la turbina para acondicionamiento de potencia y $k = 0,7$. (c) Señal de control discontinua. (d) Función de conmutación.

B.5. Resumen del apéndice

En este apéndice se presentó una aplicación del acondicionamiento por MD en sistemas monovariantes con restricciones internas. En particular, se abordó el control de un sistema de producción de hidrógeno a partir de energía eólica. La estrategia propuesta combina un algoritmo convencional de seguimiento del punto de máxima potencia con un lazo de acondicionamiento de la referencia por MD. Este lazo auxiliar garantiza en esta aplicación la operación segura del electrolizador y mejora las condiciones para la producción de hidrógeno. La solución propuesta es muy simple de implementar en el software de un algoritmo de control si se miden las variables eléctricas del electrolizador.

BIBLIOGRAFÍA

- Ackar, M. y Ü. Özgüner. Decentralized sliding mode control design using overlapping decompositions. *Automatica*, 28:1713–1718 (2002).
- Agbossou, K., R. Chahine, J. Hamelin, F. Laurencelle, y A. Anouar. Renewable energy systems based on hydrogen for remote applications. *Journal of Power Sources*, 96(1):168–172 (2001).
- Agbossou, K., M. Kolhe, J. Hamelin, y T. Kose. Performance of a stand-alone renewable energy system based on energy storage as hydrogen. *IEEE Transactions on Energy Conversion*, 19(3):633–640 (2004).
- Åström, K. y T. Häggglund. *Advanced PID control*. ISA (Instrumentation, System and Automation Society) (2006).
- Åström, K., K. Johansson, y Q. Wang. Design of decoupled PID controllers for MIMO systems. En *Proceedings of the American Control Conference*, págs. 2015–2020. Arlington, VA (2001).
- Åström, K. y L. Rundqwist. Integrator windup and how to avoid it. En *Proceedings of the American Control Conference*, págs. 1693–1698. Pittsburgh (1989).
- Bartolini, G., A. Pisano, E. Punta, y E. Usai. A survey of applications of second-order sliding mode control to mechanical systems. *International Journal of Control*, 76:875–892 (2003).
- Bondarev, A. G., S. A. Bondarev, N. E. Kostyleva, y V. I. Utkin. Sliding modes in systems with asymptotic state observers. *Automation and Remote Control*, 46(6):49–64 (1985).
- Brinsmead, T. S. y G. C. Goodwin. Cheap decoupled control. *Automatica*, 37(9):1465–1471 (2001).
- Bristol, E. On a new measure of interaction for multivariable process control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 11:133–134 (1966).
- Campo, P. y M. Morari. Robust control of processes subject to saturation nonlinearities. *Computers Chem. Engng.*, 14:343–358 (1990).

- Campo, P. y M. Morari. Achievable closed-loop properties of systems under decentralized control: conditions involving the steady-state gain. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(5):932–943 (1994).
- Castaños, F. y L. Fridman. Measurement sliding mode- H_∞ control with application to decentralized systems. En *Proceedings of 8th International Workshop on Variable Structure Systems*. Vilanova i la Geltrú, España (2004).
- Chen, C. *Linear system theory and design*. Oxford University Press, New York, 3rd. ed. edición (1999).
- Chen, C. y S. Peng. Design of a sliding mode control system for chemical processes. *Journal of Process Control*, 15:515–530 (2005).
- Chen, C. y S. Peng. A sliding mode control scheme for non-minimum phase non-linear uncertain input-delay chemical processes. *Journal of Process Control*, 16(1):37–51 (2006).
- Conley, A. y M. Salgado. Gramian based interaction measure. En *Proceedings of the Conference on Decision and Control*, págs. 5020–5022. Sydney, Australia (2000).
- De Battista, H., R. Mantz, y F. Garelli. Power conditioning for a wind-hydrogen energy system. *Journal of Power Sources*, 155:478–486 (2006).
- Dell, R. y D. Rand. Energy storage - a key technology for global energy sustainability. *Journal of Power Sources*, 100(1):2–17 (2001).
- Desoer, C. A. y A. N. Gündes. Decoupling linear multiinput multioutput plants by dynamic output feedback: An algebraic theory. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 31:744–750 (1986).
- Dutton, A., J. Bleijs, H. Dienhart, M. Falchetta, W. Hug, D. Prischich, y A. Ruddell. Experience in the design, sizing, economics, and implementation of autonomous wind-powered hydrogen production systems. *International Journal of Hydrogen Energy*, 25(8):705–722 (2000).
- Edwards, C., E. Fossas, y L. Fridman, eds. *Advances in Variable Structure and Sliding Mode Control*. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer Berlin Heidelberg New York (2006).
- Edwards, C. y I. Postlethwaite. Anti-windup and bumpless transfer schemes. *Automatica*, 34(2):199–210 (1998).
- Edwards, C. y S. K. Spurgeon. *Sliding Mode Control: Theory and Applications*. Taylor & Francis, UK, 1st edición (1998).
- Elam, C., B. Kroposki, G. Bianchi, y K. Harrison. *Renewable electrolysis integrated system development and testing*. Progress Report FY2004, DOE Hydrogen Program, NREL, Colorado (2004).
- Eldem, V. The solution of diagonal decoupling problem by dynamic output feedback and constant precompensator: the general case. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(3):503–511 (1994).
- Esfandiari, F. y H. K. Khalil. Stability analysis of a continuous implementation of variable structure control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36(5):616–620 (1991).

- Eskander, M., T. El-Shatter, y M. El-Hangry. Energy flow and management of a hybrid wind/pv/fuel cell generation system. En *IEEE 33rd Annual Power Electronics Specialists Conference (PESC)*, tomo 1, págs. 347–353 (2002).
- Fingersh, L. *Optimized hydrogen and electricity generation from wind*. Technical Report TP-500-34364, NREL, Colorado (2003).
- Freris, L., ed. *Wind energy conversion systems*. Prentice Hall, Hertfordshire, UK (1990). ISBN 0-13-960527-4.
- Freudenberg, J. y R. Middleton. Design rules for multivariable feedback systems. En *Proceedings of the Conference on Decision and Control*, págs. 1980–1985. Kobe, Japan (1996).
- Fridman, L. y A. Levant. *Sliding mode control in engineering*. Marcel Dekker, Inc. (2002).
- Garcia, C. E. y M. Morari. Internal model control -1. a unifying review and some new results. *Industrial Engineering Chemical Process Design and Development*, 21:308–323 (1982).
- Garcia, C. E. y M. Morari. Internal model control -2. design procedure for multivariable systems. *Industrial Engineering Chemical Process Design and Development*, 24:472–484 (1985a).
- Garcia, C. E. y M. Morari. Internal model control -3. multivariable control law computation and tuning guidelines. *Industrial Engineering Chemical Process Design and Development*, 24:484–494 (1985b).
- Garelli, F., R. Mantz, y H. De Battista. Desacoplamiento dinámico de procesos multivariables con saturación de actuadores. En *Anales de XI Reunión de Trabajo en Procesamiento de la Información y Control RPIC*, págs. 998–1003. Río Cuarto, Argentina. (2005).
- Garelli, F., R. Mantz, y H. De Battista. A bumpless method for multivariable process controllers via sliding mode. En *Proceedings of the 2006 International Workshop on Variable Structure Systems, VSS'06*, págs. 121–126. IEEE-CSS, Alghero, Italia. (2006a).
- Garelli, F., R. Mantz, y H. De Battista. Compensación por modo deslizante para sistemas de fase no-mínima parcialmente desacoplados. En *Proceedings of XII Latin-American Congress on Automatic Control*, págs. 157–162. Salvador Bahia, Brasil. (2006b).
Este trabajo también fue presentado en el XX Congreso Argentino de Control Automático.
- Garelli, F., R. Mantz, y H. De Battista. Limiting interactions in decentralized control of MIMO systems. *Journal of Process Control*, 16(5):473–483 (2006c).
- Garelli, F., R. Mantz, y H. De Battista. Partial decoupling of non-minimum phase processes with bounds on the remaining coupling. *Chemical Engineering Science*, 61:7706–7716 (2006d).
- Garelli, F., R. Mantz, y H. De Battista. Sliding mode reference conditioning to preserve decoupling of stable systems with input saturation (2007). *Chemical Engineering Science*, en evaluación.
- Gjosaeter, O. y A. Bjarne. On the use of diagonal control versus decoupling for ill-conditioned processes. *Automatica*, 33:427–432 (1997).
- Gómez, G. y G. Goodwin. Using coprime factorizations in partial decoupling of linear multivariable systems. En *Proceedings of the American Control Conference*, págs. 2053–2057 (1997).

- Goodwin, G., A. Feuer, y G. Gómez. A state-space technique for evaluation of diagonalizing compensators. *Systems and control letters*, 32(3):173–177 (1997).
- Goodwin, G., S. Graebe, y M. Salgado. *Control System Design*. Prentice Hall, New Jersey, 1st edición (2001).
- Goodwin, G., M. Salgado, y E. Silva. Time-domain performance limitations arising from decentralized architectures and their relationship to the RGA. *International Journal of Control*, 78(13):1045–1062 (2005).
- Grimsmo, L., M. Korpaas, T. Gjengedal, y S. Moller-Holst. A study of a stand alone wind and hydrogen system. En *Nordic Wind Power conference*, págs. 1–6. Chalmers (2004).
- Grosdidier, P., M. Morari, y B. Holt. Closed-loop properties from steady-state gain information. *Ind. Eng. Chem. Fundam.*, 24(2):221–235 (1985).
- Hang, C., K. Åström, y Q. Wang. Relay feedback auto-tuning of process controllers – a tutorial review. *Journal of Process Control*, 12:143–162 (2002).
- Hanus, R. y M. Kinnært. Control of constrained multivariable systems using the conditioning technique. En *Proceedings of the American Control Conference*, págs. 1712–1718. Pittsburgh (1989).
- Hanus, R., M. Kinnaert, y J. Henrotte. Conditioning technique, a general anti-windup and bumpless transfer method. *Automatica*, 23(6):729–739 (1987).
- Hautus, M. y M. Heymann. Linear feedback decoupling-transfer function analysis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 28(8):823–832 (1983).
- Herrmann, G., S. Spurgeon, y C. Edwards. A model-based sliding mode control methodology applied to the HDA-plant. *Journal of Process Control*, 13(2):129–138 (2003).
- Hovd, M. y S. Skogestad. Simple frequency-dependent tools for control system analysis, structure selection and design. *Automatica*, 28(5):989–996 (1992).
- Hung, J., W. Gao, y J. Hung. Variable structure control: a survey. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 40(1):2–22 (1993).
- Hung, L.-C., H.-P. Lin, y H.-Y. Chung. Design of self-tuning fuzzy sliding mode control for TORA system. *Expert Systems with Applications*, 32(4):1164–1182 (2007).
- Isidori, A. *Nonlinear Control Systems*. Springer, London, 3 edición (1995).
- Johansson, K. The quadruple-tank process: a multivariable laboratory process with an adjustable zero. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 8(3):456–465 (2000).
- Johansson, K. Interaction bounds in multivariable control systems. *Automatica*, 38(6):1045–1051 (2002).
- Johansson, K. y A. Rantzer. Decentralized control of sequentially minimum phase systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(10):1909–1913 (1999).
- Kothare, M., P. Campo, M. Morari, y K. Nett. A unified framework for the study of anti-windup designs. *Automatica*, 30(12):1869–1883 (1994).

- Koumboulis, F. N. Input-output triangular decoupling and data sensitivity. *Automatica*, 32:569–573 (1996).
- Koumboulis, F. N. y M. G. Skarpetis. Robust triangular decoupling with application to 4WS cars. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(2):344–352 (2000).
- Kwakernaak, H. y R. Sivan. *Linear Optimal Control Systems*. Interscience, New York (1972).
- Lai, N., C. Edwards, y S. Spurgeon. An implementation of an output tracking dynamic discrete-time sliding mode controller on an aircraft simulator. En *Proceedings of the 2006 International Workshop on Variable Structure Systems, VSS'06*, págs. 35–40. IEEE-CSS (2006).
- Lee, A., J. Bentsman, y C. Taft. Bumpless transfer synthesis in the MIMO systems with a large online/office controller mismatch using the state-output feedback topology. En *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control* (2002).
- Lee, J. y T. Edgar. Interaction measure for decentralized control of multivariable processes. En *Proceedings of the American Control Conference*, págs. 454–458. Anchorage, AK (2002).
- Levant, A. Higher order sliding: differentiation and black-box control. En *Proceedings of IEEE Conference on Decision and Control*, págs. 1703–1708 (2000).
- Levant, A. Universal SISO sliding-mode controllers with finite time convergence. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46:1447–1451 (2001).
- Lin, C.-A. Necessary and sufficient conditions for existence of decoupling controllers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(8):1157–1161 (1997).
- Lin, C.-A. y T.-F. Hsieh. Decoupling controller design for linear multivariable plants. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36(4):485–489 (1991).
- Linnemann, A. y R. Maier. Decoupling by precompensation while maintaining stabilizability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38(4):629–632 (1993).
- MacFarlane, A. J. y N. Karcanias. Poles and zeros of linear multivariable systems: A survey of algebraic, geometric and complex variable theory. *International Journal of Control*, 24:33–74 (1976).
- Mantz, R., H. De Battista, y F. Bianchi. VSS global performance improvement based on AW concepts. *Automatica*, 41(6):1099–1103 (2005a).
- Mantz, R., H. De Battista, y F. Garelli. Control of wind energy conversion systems supplying electrolyzers. En *Anales del I Congreso Nacional sobre Hidrógeno y Fuentes Sustentables de Energía*. Bariloche, Argentina (2005b).
- Mantz, R., H. De Battista, F. Garelli, y F. Bianchi. Novel conditioning technique for systems subjected to constraints. En *Proceedings of 8th International Workshop on Variable Structure Systems* (2004).
- McAvoy, T. J. *Interaction Analysis: Principles and Applications*. ISA, Research Triangle Park, North Carolina (1983).
- Mohan, N., T. Undeland, y W. Robbins. *Power Electronics: Converters, Applications and Design*. John Wiley & sons, New York, 3rd edición (2003). ISBN 0-471-22693-9.

- Morari, M. y E. Zafriou. *Robust Process Control*. Prentice Hall, New Jersey (1989).
- Morse, A. S. y W. M. Wonham. Triangular decoupling of linear multivariable systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-15:447–449 (1970).
- Mulder, E., M. Kothare, y M. Morari. Multivariable anti-windup controller synthesis using LMI. *Automatica*, 37:1407–1416 (2001).
- Nett, C. y V. Manousiouthakis. Euclidean condition and block relative gain: connnections, conjectures and clarifications. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 5:405–407 (1987).
- Ozkocak, T., M. Fu, y G. Goodwin. A nonlinear modelling approach to the sugar cane crushing process. En *Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control*, págs. 3144–3149. Tampa, Florida, USA (1998).
- Paraskevopoulos, P. N., N. Koumboulis, N. D. Kouvakas, y C. Balafas. I/O decoupling via dynamic controllers - a state space approach-. En *Proceedings of the 13th Mediterranean Conference on Control and Automation*. Limassol, Cyprus (2005).
- Peng, Y., D. Vrancic, R. Hanus, y S. Weller. Anti-windup design for multivariable controllers. *Automatica*, 34:1559–1565 (1998).
- Peng, Y., D. Vrančić, y R. Hanus. Anti-windup, bumpless, and CT techniques for PID controllers. *IEEE Control Systems Magazine*, 16(4):48–56 (1996).
- Perruquetti, W. y J. P. Barbot, eds. *Sliding Mode Control in Engineering*. Control Engineering Series. Marcel Dekker (2002).
- Picó, J., E. Picó-Marco, J. Navarro, y H. De Battista. *Nonlinear and Adaptive Control: Theory and Algorithms for the User*, capítulo Control of fedbatch bioreactors. Imperial College Press, London (2005).
- Puleston, P. y R. Mantz. An anti-windup proportional integral structure for controlling time-delayed multiinput-mutioutput processes. *Industrial Engineering and Chemistry research*, 34:2993–3000 (1995).
- Rogozinsky, M., P. Paplinsky, y M. Gibbard. An algorithm for the calculation of a nilpotent interactor matrix for linear multivariable systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 32:234–237 (1987).
- Rosenbrock, H. *State-Space and Multivariable Theory*. Nelson, London (1970).
- Salgado, M. y A. Conley. MIMO interaction measure and controller structure selection. *International Journal of Control*, 77(4):367–383 (2004).
- Schucan, T. *Case studies of integrated hydrogen energy systems*. Final report, International Energy Agency Hydrogen Implementing Agreement, Paul Scherrer Institute, Switzerland (2000).
- Seron, M., J. Braslavsky, y G. Goodwin. *Fundamental Limitations in Filtering and Control*, capítulo 4. Springer, London, 1st edición (1997).
- Shakya, B., L. Aye, y P. Musgrave. Technical feasibility and financial analysis of hybrid wind-photovoltaic system with hydrogen production for cooma. *International Journal of Hydrogen Energy*, 30(1):9–20 (2005).

- Silva, E. y M. Salgado. Performance bounds for feedback control of non-minimum phase MIMO systems with arbitrary delay structure. *IEE Proc. Control Theory Appl.*, 152:211–219 (2005).
- Sira-Ramírez, H. Differential geometric methods in variable structure systems. *International Journal of Control*, 48(4):1359–1390 (1988).
- Sira-Ramírez, H. Sliding regimes in general non-linear systems: a relative degree approach. *International Journal of Control*, 50:1487–1506 (1989).
- Skogestad, S. y M. Morari. Robust performance of decentralized control systems by independent designs. *Automatica*, 25(1):119–125 (1989).
- Skogestad, S. y M. Morari. Variable selection for decentralized control. *Model, Identification and Control*, 13(2):113–125 (1992).
- Skogestad, S. y I. Postlethwaite. *Multivariable Feedback Control: Analysis and Design, 2nd Edition*. Wiley (2005).
- Slotine, J.-J. y S. Sastry. Tracking control of non-linear systems using sliding surfaces. *International Journal of Control*, 38:465–492 (1983).
- Sorosh, M., S. Valluri, y N. Mehranbod. Nonlinear control of input-constrained systems. *Computers and Chemical Engineering*, 30:158–181 (2005).
- Special-Issue. Control of systems with bounded control. *International Journal on Robust and Nonlinear Control*, 9 (1999).
- Special-Issue. New developments and applications in performance limitation of feedback control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(8) (2003).
- Special-Issue. Anti-windup. *International Journal of Systems Science*, 37(2) (2006).
- Tarbouriech, S., G. Garcia, y A. Glattfelder, eds. *Advanced Strategies in Control Systems with Input and Output Constraints*, tomo 346 de *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Springer (2007).
- Turner, M., N. Aouf, D. Bates, L. Postlethwaite, y B. Boulet. A switching scheme for full-envelope control of a V/STOL aircraft using LQ bumpless transfer. En *Proceedings of IEEE International Conference on Control Applications* (2002).
- Turner, M. y D. Walker. Linear quadratic bumpless transfer. *Automatica*, 36:1089–1101 (2000).
- Ulleberg, Ø. Modeling of advanced alkaline electrolyzers: a system simulation approach. *International Journal of Hydrogen Energy*, 28(1):21–33 (2003).
- Utkin, V. Variable structure systems with sliding modes. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 22(2):212–222 (1977).
- Utkin, V. *Sliding Modes in Control and Optimization*. Springer-Verlag, Berlin (1992).
- Utkin, V., J. Guldner, y J. Shi. *Sliding Mode Control in Electromechanical Systems*. Taylor & Francis, London, 1st edición (1999).

- Utkin, V. y H. Lee. Chattering problem in sliding mode control systems. En *Proceedings of the 2006 International Workshop on Variable Structure Systems, VSS'06*, págs. 346–350. IEEE-CSS (2006).
- Vosen, S. y J. Keller. Hybrid energy storage systems for stand-alone electric power systems: optimization of system performance and cost through control strategies. *International Journal of Hydrogen Energy*, 24(12):1139–1156 (1999).
- Walgama, K., S. Rönnbäck, y J. Sternby. Generalization of conditioning technique for anti-windup compensators. *IEE Proceedings on Control Theory and Applications*, 139(2):109–118 (1992).
- Walgama, K. y J. Sternby. Conditioning technique for MIMO processes with input saturation. *IEE Proceedings on Control Theory and Applications*, 140:231–241 (1993).
- Wang, Q. G. Decoupling with internal stability for unity output feedback systems. *Automatica*, 28(2):411–415 (1992).
- Wang, Q. G. *Decoupling control*. Springer Berlin Heidelberg, 1st edición (2003).
- Weller, S. R. y G. C. Goodwin. Controller design for partial decoupling of linear multivariable systems. *International Journal of Control*, 63(3):535–556 (1996).
- West, M. *Modelling and control of a sugar crushing station*. Proyecto Fin de Carrera, Department of Electrical and Computer Engineering, The University of Newcastle, Australia (1997).
- Wolowich, W. y P. Falb. Invariants and canonical forms under dynamic compensation. *Siam J. Control Optim.*, 14:996–1008 (1976).
- Wu, F. y K. Grigoriadis. LPV based control of systems with amplitude and rate actuator saturation constraints. En *Proceedings of the American Control Conference*, págs. 3191–3195. San Diego (1999).
- Yang, Y.-S., Q.-G. Wang, y L.-P. Wang. Decoupling control design via linear matrix inequalities. *IEE Proceedings - Control Theory and Applications*, 152:357–362 (2005).
- Youla, D., H. Jabr, y J. Bongiorno. Modern Wiener-Hopf design of optimal controllers, part ii: the multivariable case. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 21:319–380 (1976).
- Young, K., V. Utkin, y U. Ozgüner. A control engineer's guide to sliding mode control. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 7(3):328–342 (1999).
- Zaccarian, L. y A. Teel. A common framework for anti-windup, bumpless transfer and reliable designs. *Automatica*, 38:1735–1744 (2002).
- Zaccarian, L. y A. Teel. The \mathcal{L}_2 (l_2) bumpless transfer problem for linear plants: Its definition and solution. *Automatica*, 41:1273–1280 (2005).
- Zames, G. Feedback and optimal sensitivity: model reference transformations, multiplicative seminorms and approximate inverse. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26:301–320 (1981).
- Zheng, A., M. Kothare, y M. Morari. Anti-windup design for internal model control. *International Journal of Control*, 60(5):1015–1024 (1994).

Zheng, K., A. Lee, J. Bentsman, y C. Taft. Steady-state bumpless transfer under controller uncertainty using the state/output feedback topology. En *Proceedings of the 43th Conference on Decision and Control* (2004).